차 례

상 식

머 리 말

위대한 령도자 **김정일**대원수님께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《수학은 모든 자연과학의 기초로 될뿐아니라 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 됩니다. 수학교육을 강화하는것은 자라나는 새 세대들의 과학적인 사고능력을 키워주는데서 중요한 의의를 가집니다.》

수학은 물리학, 천문학, 화학, 생물학을 비롯한 자연과학의 모든 분야와 밀접한 관계가 있으며 인구통계와 환경보호, 경제관리 등 사회현상을 연구하는데서도 중요한 수단으로 된다.

수학과 물리학과의 관계만 놓고보아도 16～17세기 도함수와 적분법의 도입은 뉴톤의 법칙, 쿨롱의 법칙, 만유인력의 법칙 등 물리학의 중요한 법칙들을 정식화하고 응용하는데 적극 이바지하였으며 아르키메데스가 지레대의 원리를 발견한 때로부터 2 000여년동안 거의 정지상태에 있던 물리학의 발전을 크게 자극하였다.

6학년에서는 평면에서 각이한 도형들을 대수적으로 고찰할수 있는 기초를 주는 평면도형의 방정식과 변하는 량들사이의 관계를 수학적으로 고찰할수 있게 하는 도함수와 적분에 대하여 학습하게 된다.

또한 우연적인 현상들의 법칙성을 연구하는 확률과 사람들의 사회실천활동을 목적지향성있게 과학적으로 할수 있게 하는 수단으로 되는 통계 그리고 확률과 통계계산의 기초수단인 순렬과 조합에 대하여 학습하게 된다.

우리가 6학년 수학에서 배우는 내용들은 인공지구위성과 CNC기계의 제작과 같은 최첨단과학기술분야의 발전뿐아니라 현대사회의 다종다양한 정보들을 능숙하게 처리하여 사업과 생활에서 제기되는 문제들을 능숙하게 풀어나갈수 있게 하는 중요한 기초지식들이다.

우리는 수학학습을 더 열심히 하여 21세기 정보산업시대에 자기의 역할을 원만히 수행할수 있는 풍부한 지식과 능력을 소유하여야 한다.

제1장. 순렬과 조합

제1절. 순 렬

찾기 학생 ㉮, ㉯, ㉰를 가지고 2명씩 뽑아 렬을 만들어보아라.

일반적으로 어떤 대상들을 순서를 고려하여 배렬한것을 순렬이라고 부르고 이때 매 대상을 순렬의 원소라고 부른다. 이것을 정식화하면 다음과 같다.

> 어떤 모임의 서로 다른 n개의 원소에서 $m(m \le n)$개의 원소를 일정한 순서에 따라 배렬한것을 서로 다른 n개의 원소에서 m개의 원소를 취한 **순렬**이라고 부른다. 이때 n개의 원소에서 m개의 원소를 취한 순렬의 총수를
>
> $$\mathrm{P}_n^m$$
>
> 으로 표시한다.

례 1. 서로 다른 4개의 수자 1, 2, 3, 4에서 3개씩 뽑은 순렬을 만들어보아라. 몇개나 되는가? 그림으로 설명하여라.

(풀이)

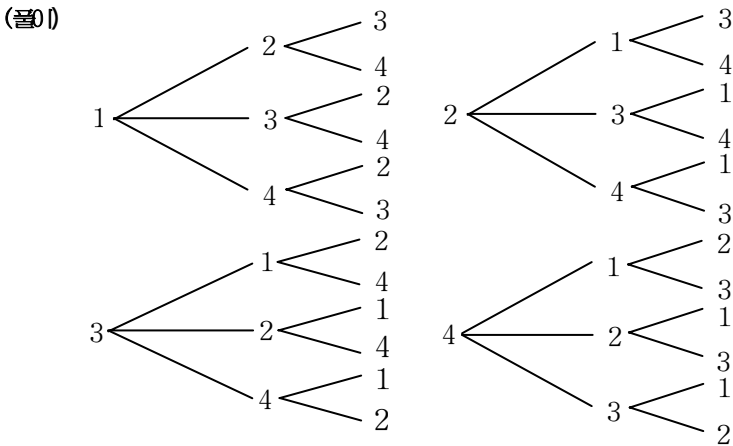



그림 1-1

$\mathrm{P}_4^3 = 4\times(4-1)\times(4-2)=24$

답. 24개

순렬의 총수공식

$$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

(증명) n개의 원소를 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 으로 표시하자.

이 n개의 원소들가운데서 먼저 한개를 취하여 첫 자리에 배렬하는 방법은 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 가운데 어느것이라도 되므로 n가지이다. 둘째 자리에는 첫 자리에 배렬한것($a_1, a_2, \cdots, a_n$ 가운데 어느 한 원소)을 제외한 $n-1$ 개의 원소들가운데 어느것이라도 되므로 $n-1$ 가지 방법으로 배렬할수 있다. 이와 마찬가지로 셋째, 넷째, $\cdots$, m번째 자리에는 각각 $n-2, n-3, \cdots, n-(m-1)$ 가지 방법으로 배렬할수 있다.

그러므로 n개의 서로 다른 원소에서 m개씩 취하여 만든 순렬의 총수는

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

만일 n개의 원소를 전부 배렬하는 순렬을 고찰한다면 $m=n$이므로 이러한 순렬의 총수는 다음과 같다.

$$P_n^n = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$$

$n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ 을 $n!$ 으로 표시하고 n차례곱(팍토리알)이라고 부른다.

차례곱을 써서 순렬의 총수 P_n^m 을 표시하면

$$P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

례 2. 다음것을 계산하여라.

1) P_7^3 2) P_5^5 3) P_n^{n-1}

(풀이) 1) $P_7^3 = 7\cdot 6\cdot 5 = 210$

2) $P_5^5 = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$

3) $P_n^{n-1} = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2$

례 3. 6명의 달리기선수가운데서 4명을 뽑아서 이어달리기경기에 내보내려고 한다. 달리는 차례까지 정한다면 이렇게 뽑는 방법은 몇가지인가?

(풀이) 4명의 선수를 달리는 차례까지 정하여 뽑는것은 6개에서 4개씩 뽑은 순렬을 만드는것과 같다. 따라서

$$\mathrm{P}_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

답. 360가지

문 제

1. 다음것을 계산하여라.

1) P_5^2　　2) P_6^5　　3) P_{10}^4

2. 다음 같기식이 성립한다는것을 밝혀라.

1) $\mathrm{P}_n^{n-1} = \mathrm{P}_n^n$　　2) $\mathrm{P}_2^2 + \mathrm{P}_3^2 + \mathrm{P}_4^2 = \mathrm{P}_5^2$

3. 수자 0, 1, 2, 3, 4, 5를 가지고 같은 수자가 거듭 들어가지 않는 세자리수를 몇개 만들수 있는가?

4. 4개의 문자 a, b, c, d에서 3개씩 뽑는 순렬을 다 만들어라.

5. 4개의 수자 1, 2, 3, 4를 모두 써서 만든 네자리수가운데서 천의 자리는 1이 아니고 백의 자리는 2가 아니고 열의 자리는 3이 아니며 하나의 자리는 4가 아닌것을 모두 몇개나 만들수 있겠는가?

련습문제

1. 다음것을 계산하여라.

1) $\dfrac{\mathrm{P}_9^5 + \mathrm{P}_9^4}{\mathrm{P}_7^6 + \mathrm{P}_7^5}$　　2) $\dfrac{\mathrm{P}_{10}^5 - \mathrm{P}_{10}^4}{\mathrm{P}_8^5 + \mathrm{P}_8^6}$

3) $(\mathrm{P}_4^4 - \mathrm{P}_3^3)(\mathrm{P}_n^2 - \mathrm{P}_n^1)$　　4) $\dfrac{\mathrm{P}_n^4 - \mathrm{P}_n^3}{\mathrm{P}_n^2}$

2. x, $m \in \mathrm{N}$, $m < 19 < x$일 때 $(x-m)(x-m-1)\cdots(x-19)$를 순렬을 써서 표시하면 어느것이 옳은가?

1) P_{x-m}^{x-19}　　2) P_{x-m}^{20-m}　　3) P_{x-m}^{19-m}　　4) P_{x-m}^{18-m}

3. 다음 방정식을 풀어라.

1) $P_x^2 = 56$　　2) $P_x^3 = xP_3^2$

3) $P_{2x}^3 = 10P_x^3$　　4) $(P_x^5 + P_x^4) \div P_x^3 = 1$

4. $5(P_n^3 + P_{n+1}^4) = 12P_{n+1}^3$에 맞는 n의 값을 구하여라.

5. 륙상주로가 4줄로 되여있는 경기장에서 4명의 선수들이 출발선을 차지하는 방법은 몇가지인가?

6. 수자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7에서 서로 다른 수자를 뽑아서 만든 다섯자리수가운데서 25의 배수는 몇개인가?

7. 5개의 수자 0, 1, 2, 3, 4가운데서 같은 수자가 거듭 들어가지 않는 네자리수는 모두 몇개인가?

8. 8개의 수자 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7을 가지고 같은 수자가 거듭 들어가지 않는 네자리수를 몇개 만들수 있는가?

제2절. 조 합

알아보기 선수 4명가운데서 3명을 선발하는 방법은 몇가지인가?

n개의 서로 다른 원소가운데서 m개의 원소를 취하되 순서를 고려하지 않은 매개 렬을 n개의 원소에서 m개 취한 **조합**이라고 부르며 이때 조합의 총수를

$$C_n^m \quad (\text{또는 } \binom{m}{n})$$

으로 표시한다.

조합의 총수공식

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

(증명) 이 공식을 증명하기 위하여 n개의 서로 다른 원소가운데서 m개의 원소를 취한 순렬의 총수를 두가지 방법으로 구하자.

먼저 n개의 서로 다른 원소에서 m개의 원소를 취한 순렬의 총수는 공식에 의하여

$$\mathrm{P}_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) \qquad (1)$$

한편 n개의 서로 다른 원소에서 m개 취한 조합의 총수를 x라고 하면 그가운데서 매개 조합은 m개의 원소를 가진다. 이 매개 조합에 대하여 순렬을 만들면 매번 $m!$개의 순렬을 얻으며 따라서 순렬의 총수는

$$x \times m! \qquad (2)$$

(1)과 (2)로부터

$$x \times m! = \mathrm{P}_n^m$$

즉 $$x = \mathrm{C}_n^m = \frac{\mathrm{P}_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

례 1. 다음것을 계산하여라.

1) C_5^3　　　　2) $\mathrm{C}_{10}^4 - \mathrm{C}_9^3$

(풀이) 1) $\mathrm{C}_5^3 = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10$

2) $\mathrm{C}_{10}^4 - \mathrm{C}_9^3 = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \dfrac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 126$

례 2. 40개의 제품이 들어있는 제품상자에서 3개의 제품을 꺼내여 검사한다. 3개의 제품을 꺼내는 방법은 몇가지 있는가?

(풀이) 제품을 꺼내는 방법의 수는 40개의 원소에서 3개씩 뽑은 조합의 총수와 같으므로

$$\mathrm{C}_{40}^3 = \frac{40\cdot 39\cdot 38}{1\cdot 2\cdot 3} = 9880$$

답. 9 880가지

례 3. 6개의 평행직선과 5개의 평행직선이 사귈 때 얻어지는 평행4변형의 총수를 구하여라.

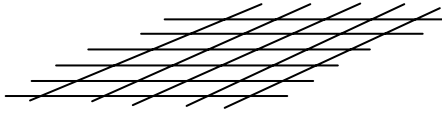



그림 1-2

(풀이) 매개 평행4변형은 6개의 평행직선들가운데서 어느 2개와 5개의 평행직선들가운데서 어느 2개에 의하여 얻어진다. 그런데 6개의 평행직선에서 2개씩 뽑는 방법은 C_6^2 가지이고 5개의 평행직선에서 2개씩 뽑는 방법은 C_5^2 가지이므로 평행4변형의 총수는

$$C_6^2 \times C_5^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 150$$

답. 150가지

문 제

1. 다음것을 계산하여라.

1) C_5^4 2) C_7^4 3) C_{10}^2

2. 볼록n각형은 대각선을 몇개 가지는가?

3. 4명의 학생이 수학, 물리, 화학소조에 들어가는데 매 학생이 한가지를 선택한다면 서로 다른 선택방법은 몇가지인가?

조합의 공식을

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

로 표시할수도 있다.

만일 $C_n^0 = 1$이라고 하면 우의 공식의 오른변에서도 $m=0$일 때

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\,n!} = 1$$

이므로 우의 공식은 m=0인 경우에도 그대로 성립한다.

이때

$$0! = 1$$

로 본다.

다음의 같기식들도 성립한다.

$$\mathrm{C}_n^m = \mathrm{C}_n^{n-m}$$

(증명) 조합의 공식으로부터

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$\mathrm{C}_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!\,[n-(n-m)]!} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

이므로

$$\mathrm{C}_n^m = \mathrm{C}_n^{n-m}$$

$$\mathrm{C}_{n+1}^m = \mathrm{C}_n^m + \mathrm{C}_n^{m-1}$$

(증명) $\mathrm{C}_{n+1}^m = \dfrac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!}$ 이고

$$\mathrm{C}_n^m + \mathrm{C}_n^{m-1} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m+1)!}$$

$$= \frac{n!(n-m+1) + n!m}{m!\,(n-m+1)!} = \frac{n!(n+1)}{m!(n-m+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{m!\,(n-m+1)!}$$

이므로

$$\mathrm{C}_{n+1}^m = \mathrm{C}_n^m + \mathrm{C}_n^{m-1}$$

례 4. 다음것을 계산하여라.

1) C_{80}^{78}　　　　2) C_{1000}^{999}

(풀이) 1) $C_{80}^{78}=C_{80}^{2}=\frac{80\cdot 79}{1\cdot 2}=3160$

2) $C_{1000}^{999}=C_{1000}^{1}=1000$

문 제

1. 다음것을 계산하여라.

1) C_{28}^{27}　　2) C_{85}^{83}　　3) C_{600}^{598}　　4) C_{10000}^{9999}

2. 다음 명제에서 옳은것을 찾아라.

1) n개에서 m개씩 뽑은 조합의 총수는 n개에서 m개씩 뽑은 순렬의 총수의 $m!$배와 같다.

2) $C_m^3+C_m^4=C_{m+1}^5$

3) $C_n^m=C_n^k$ 이면 $m=k$이다.

3. 다음 같기식이 성립한다는것을 증명하여라.

1) $C_n^m+2C_n^{m+1}+C_n^{m+2}=C_{n+2}^{m+2}$

2) $C_n^m+3C_n^{m+1}+3C_n^{m+2}+C_n^{m+3}=C_{n+3}^{m+3}$

련습문제

1. 6개의 원소로 된 모임 $\{a, b, c, d, e, f\}$ 에서 4개씩 뽑은 조합을 다 써라.

2. 다음 같기식에서 늘같기식이 아닌것을 지적하여라.

1) $C_n^m=C_n^{n-m}$ $(m\le n)$

2) $(n+2)(n+1)P_n^m=P_{n+2}^{m+2}$ $(m\le n)$

3) $C_n^m=\frac{P_n^m}{n!}$ $(m\le n)$

4) $C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$ $(1\le m<n)$

3. 다음것을 계산하여라.

1) C_n^{n-2}　　2) $C_{60}^{59}+C_{60}^{1}$　　3) $C_n^{m+1}-C_{n-1}^m$

4) $C_{10}^3+C_{10}^2+C_{10}^1+C_{10}^0$　　5) $C_5^1+2C_5^2+3C_5^3+4C_5^4+5C_5^5$

4. 계산을 하지 말고 다음 갈기식이 옳다는것을 증명하여라.

1) $C_5^0+C_5^1+C_5^2=C_5^3+C_5^4+C_5^5$

2) $C_7^0+C_7^1+C_7^2+C_7^3=C_7^4+C_7^5+C_7^6+C_7^7$

5. 다음 갈기식이 성립한다고 말할수 있는가?

1) $C_{10}^3=P_5^3$　　2) $C_m^3+C_m^4=C_{m+1}^5$

3) $C_{m+3}^5=C_{m+3}^{m-2}$　　4) $C_{m-1}^n+C_{m-1}^{n-1}=C_m^n$

6. 20명의 병사와 3명의 사관이 있다. 3명의 병사와 1명의 사관으로 습격조를 조직하는 방법은 몇가지인가?

7. 몇개의 단체가 련맹전의 방법으로 롱구경기를 하려고 한다. 경기를 모두 36번 한다면 몇개의 단체가 참가하겠는가?

8. 15명으로 조직된 한 분조가 A, B, C 세 장소에 갈라져서 일하려고 한다. A에는 8명, B에는 4명, C에는 3명 배치한다면 배치하는 방법에는 몇가지 있겠는가?

제3절. 2마디공식

1. 수학적귀납법

알아보기 자연수 n에 관계되는 식 $f(n)=(n^2-5n+5)^2$에서

$n=1$일 때 $f(1)=(1^2-5\cdot1+5)^2=1$

$n=2$일 때 $f(2)=(2^2-5\cdot2+5)^2=1$

$n=3$일 때 $f(3)=(3^2-5\cdot3+5)^2=1$

$n=4$일 때 $f(4)=(4^2-5\cdot4+5)^2=1$

이라는데로부터 $n=5$일 때도 $f(5)=1$이라고 말할수 있는가를 알아보아라.

일반적으로 자연수 n에 관한 어떤 명제를 $P(n)$으로 표시하자.

이 명제가 몇개의 자연수에 대하여 옳다고 하여 모든 자연수에 대해서도 옳다고 결론할수는 없다. 그렇다고 하여 많은 자연수에 대하여 하나하나 따져보는 방법으로 옳다는것을 확인할수도 없다.

몇개의 자연수에 대하여 명제 $P(n)$이 옳다는것을 확인한데 기초하여 모든 자연수에 대해서도 옳다는 결론을 이끌어내는 증명방법이 있다.

자연수 n에 관계되는 명제 $P(n)$에 대하여 다음 두 사실이 증명되면 $P(n)$은 모든 자연수 n에 대하여 옳다.

1) $P(1)$이 옳다.

2) $P(k)$가 옳으면 $P(k+1)$도 옳다.

사실 1)에 의하여 $P(1)$이 옳기때문에 2)에 의하여 $P(2)$가 옳으며 또한 $P(3)$도 옳다.

이 과정을 거듭하면

$$P(1),\ P(2),\ P(3),\ \cdots,\ P(n),\ \cdots$$

들이 다 옳다는것이 나온다.

이러한 증명방법을 **수학적귀납법**이라고 부른다.

수학적귀납법은 자연수에 관계되는 명제들을 증명할 때 널리 쓰인다.

례 1. 수학적귀납법으로 다음 식을 증명하여라.

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(풀이) 1) $n=1$ 일 때

왼변$=1$, 오른변$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)=1$

2) $n=k$ 일 때 옳다고 하자.

즉 $1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$

그러면 $n=k+1$일 때

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)=\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)+1]$$

이리하여 모든 자연수 n에 대하여 갈기식이 성립한다.

례 2. 수학적귀납법으로 모든 n에 대하여 안갈기식

$$(1+h)^n\geqq 1+n\cdot h\ (h>-1)$$

이 성립한다는것을 증명하여라.

(풀이) 1) $n=1$일 때

왼변$=(1+h)=1+h$

오른변$=1+1\cdot h=1+h$

2) $n=k$일 때 옳다고 하자.

즉 $(1+h)^k \geqq 1+kh$

그러면 $n=k+1$일 때

$$(1+h)^{k+1}=(1+h)^k(1+h)\geqq(1+kh)(1+h)$$
$$=1+(k+1)h+kh^2\geqq 1+(k+1)h$$

즉 안같기식이 성립한다.

이리하여 모든 n에 대하여 안같기식이 성립한다.

문 제

1. 다음것을 수학적귀납법으로 증명하여라.

1) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$

2) $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$

2. 모든 자연수 n에 대하여 n^3+5n은 6으로 완제된다는것을 증명하여라.

3. 수학적귀납법으로 다음 식을 증명하여라.

1) $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

2) $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$

3) $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

2. 2마디공식

해보기 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=\mathrm{C}_2^0a^2+\mathrm{C}_2^1ab+\mathrm{C}_2^2b^2$ 이다.

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 도 이와 같은 모양으로 표시해보아라.

뉴톤의 공식

$$(a+b)^n=\mathrm{C}_n^0a^n+\mathrm{C}_n^1a^{n-1}b+\mathrm{C}_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+\mathrm{C}_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+\mathrm{C}_n^nb^n$$

(증명) $n=1$일 때

왼변$=a+b$, 오른변$=\mathrm{C}_1^0a+\mathrm{C}_1^1b=a+b$ 이다.

$n=k$일 때 옳다고 보고 $n=k+1$인 경우를 보자.

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)^k(a+b)$$
$$=(\mathrm{C}_k^0a^k+\mathrm{C}_k^1a^{k-1}b+\mathrm{C}_k^2a^{k-2}b^2+\cdots+\mathrm{C}_k^kb^k)(a+b)$$
$$=\mathrm{C}_k^0a^{k+1}+(\mathrm{C}_k^0+\mathrm{C}_k^1)a^kb+(\mathrm{C}_k^1+\mathrm{C}_k^2)a^{k-1}b^2+\cdots+\mathrm{C}_k^kb^{k+1}$$

이다. 그런데

$$\mathrm{C}_k^0=\mathrm{C}_{k+1}^0,\ \mathrm{C}_k^0+\mathrm{C}_k^1=\mathrm{C}_{k+1}^1,\ \mathrm{C}_k^1+\mathrm{C}_k^2=\mathrm{C}_{k+1}^2,\ \cdots,$$
$$\mathrm{C}_k^{k-1}+\mathrm{C}_k^k=\mathrm{C}_{k+1}^k,\ \mathrm{C}_k^k=\mathrm{C}_{k+1}^{k+1}$$

이므로

$$(a+b)^{k+1}=\mathrm{C}_{k+1}^0a^{k+1}+\mathrm{C}_{k+1}^1a^kb+\mathrm{C}_{k+1}^2a^{k-1}b^2+\cdots+\mathrm{C}_{k+1}^kab^k+\mathrm{C}_{k+1}^{k+1}b^{k+1}$$

즉 $n=k+1$ 때에도 같기식이 옳다는것이 밝혀졌다. 이리하여 수학적귀납법에 의하여 모든 자연수에 대하여 공식이 성립한다고 결론할수 있다.

뉴톤의 공식을 뉴톤의 2마디공식 또는 2마디공식이라고 부르고 이 공식의 오른변을 $(a+b)^n$의 **전개식**, 매 마디의 곁수

$$\mathrm{C}_n^0,\ \mathrm{C}_n^1,\ \mathrm{C}_n^2,\ \cdots,\ \mathrm{C}_n^k,\ \cdots,\ \mathrm{C}_n^{n-1},\ \mathrm{C}_n^n$$

을 2마디곁수라고 부른다. 그리고 전개식의 $k+1$번째 마디 $\mathrm{C}_n^ka^{n-k}b^k$을 일반마디라고 부른다.

례 1. 다음 식을 전개하여라.

1) $(a+b)^4$　　2) $(a-b)^5$

(풀이) 1) $(a+b)^4 = \mathrm{C}_4^0 a^4 + \mathrm{C}_4^1 a^3 b + \mathrm{C}_4^2 a^2 b^2 + \mathrm{C}_4^3 ab^3 + \mathrm{C}_4^4 b^4$

그런데 $\mathrm{C}_4^0 = \mathrm{C}_4^4 = 1,\ \ \mathrm{C}_4^1 = \mathrm{C}_4^3 = 4,\ \ \mathrm{C}_4^2 = \dfrac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 6$

이므로

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

2) $(a-b)^5 = [a+(-b)]^5 = \mathrm{C}_5^0 a^5 + \mathrm{C}_5^1 a^4(-b) + \mathrm{C}_5^2 a^3 (-b)^2 +$
$+ \mathrm{C}_5^3 a^2 (-b)^3 + \mathrm{C}_5^4 a(-b)^4 + \mathrm{C}_5^5 (-b)^5$

그런데 $\mathrm{C}_5^0 = \mathrm{C}_5^5 = 1,\ \ \mathrm{C}_5^1 = \mathrm{C}_5^4 = 5,\ \ \mathrm{C}_5^2 = \mathrm{C}_5^3 = \dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$

이므로

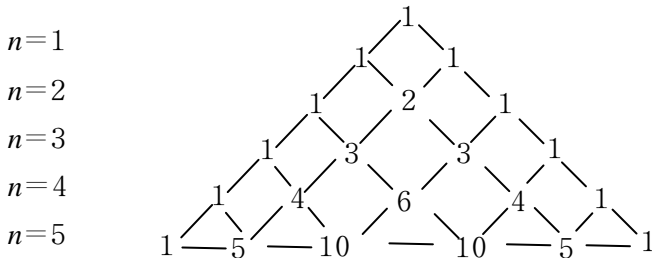
$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4 b + 10a^3 b^2 - 10a^2 b^3 + 5ab^4 - b^5$$

례 2. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^5$ 을 전개하여라.

(풀이) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^5 = \mathrm{C}_5^0 x^5 + \mathrm{C}_5^1 x^4\left(\dfrac{1}{x}\right) + \mathrm{C}_5^2 x^3\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 + \mathrm{C}_5^3 x^2\left(\dfrac{1}{x}\right)^3 + \mathrm{C}_5^4 x\left(\dfrac{1}{x}\right)^4 +$

$+ \mathrm{C}_5^5\left(\dfrac{1}{x}\right)^5 = x^5 + 5x^3 + 10x + \dfrac{10}{x} + \dfrac{5}{x^3} + \dfrac{1}{x^5}$

2마디공식에서 전개식의 결수들을 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$ 으로 n 을 하나씩 증가시키면서 차례로 써보면 다음과 같은 《3각형》을 얻을수 있고 거기에 일정한 규칙성이 있다는것을 알수 있다.

……………………………………

이것을 파스칼3각형이라고 부른다.

2마디공식은 뉴톤이 발견하였는데 그는 이 공식이 n이 부수일 때와 분수일 때에도 성립한다는것을 증명하였다.

례 3. $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^9$ 의 전개식에서 x^6 의 결수와 x 가 들어있지 않는 마디를 구하여라.

(풀이) 전개식의 일반마디는

$$\mathrm{C}_9^k(x^2)^{9-k}\left(-\frac{1}{x}\right)^k=(-1)^k\mathrm{C}_9^k x^{18-3k}$$

그러므로 x^6 의 결수를 구하려면

$18-3k=6$ 즉 $k=4$ 를 택한다.

따라서 x^6 의 결수는

$$(-1)^4\mathrm{C}_9^4=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=126$$

x 가 들어있지 않는 마디는

$18-3k=0$ 즉 $k=6$ 일 때이므로

$$(-1)^6\mathrm{C}_9^6=\mathrm{C}_9^3=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$$

이것은 전개식의 7번째 마디이다.

문 제

1. 다음 식을 전개하여라.

1) $(x+2y)^6$　　2) $(3-x)^5$

3) $(x-1)^7$　　4) $\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^6$

2. $\left(2x+\frac{y}{3}\right)^6$ 의 전개식에서 x^4y^2, x^5y 의 결수를 구하여라.

3. $\left(3x+\frac{2}{x}\right)^8$ 의 전개식에서 x 가 들어있지 않는 마디와 x^{-2} 이 들어있지 않는 마디를 구하여라.

4. $(a-b)^n$ 의 전개식을 써라.

련습문제

1. n각형의 아낙각들의 합이 $(n-2)180°$ 라는것을 증명하여라.
2. 수학적귀납법을 써서 $n^{n+1} > (n+1)^n$ $(n \geq 3)$ 이 성립한다는것을 증명하여라.
3. 다음 식을 전개하여라.

1) $(x+3)^5$　　2) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^5$

3) $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{x}\right)^8$　　4) $\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^7$

4. 다음 식을 계산하여라.

1) $\left(1+a^{\frac{1}{2}}\right)^7+\left(1-a^{\frac{1}{2}}\right)^7$　　2) $\left(2\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^4-\left(2\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^4$

5. $(2a^3-3b^2)^8$ 의 전개식에서 세번째 마디를 구하여라.
6. $\left(2x^2-\frac{1}{3x}\right)^7$ 의 전개식에서 x^8 의 마디를 구하여라.
7. $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^7$ 의 전개식에서 x가 들어있지 않는 마디를 구하여라.
8. $\left(3x^2-\frac{1}{2x^2}\right)^8$ 의 전개식에서 일반마디와 가운데마디를 구하여라.
9. $(2+x)^{10}$ 의 전개식에서 가장 큰 결수를 가지는 마디를 구하여라.
10. $(\sqrt{x}+2)^5$ 의 전개식에서 두번째 마디의 값이 1 000보다 크게 되는 x의 범위를 구하여라.

복습문제

1. 붉은색, 푸른색, 노란색, 풀색, 흰색 기발이 1개씩 있다. 기발 3개를 한줄에 배렬하면 한가지 신호를 얻는다. 이 5가지 기발로 몇가지 신호를 할수 있는가?
2. 7명의 학생을 나란히 세우는 방법은 몇가지 있는가? 키가 가장 큰 학생이 끝에 있도록 나란히 세우는 방법은 몇가지인가?

3. 1부터 9까지의 수자를 써서 같은 수자가 거듭 들어가지 않는 네자리 홀수를 몇개 만들수 있는가?

4. 서로 다른 수자로 되여있는 네자리수가운데 짝수와 홀수가 번갈아 나오는것은 모두 몇개인가?

5. 볼록n각형 $P_1P_2\cdots P_n$의 세 정점을 련결하여 얻은 3각형들가운데서 볼록n각형의 변을 가지지 않는 3각형은 몇개나 되겠는가?

6. 각각 6개, 5개, 3개의 평면으로 이루어진 평행평면들이 세개가 사귀여 생기는 평행6면체의 개수는 몇개인가?

7. 최우등생 10명과 우등생 6명가운데서 각각 3명씩 뽑는 방법은 몇가지 있는가?

8. 10명의 학생을 3개의 호실 A, B, C에 배치하려고 한다.

   1) A에 4명, B, C에 각각 3명씩 배치하는 방법은 몇가지 있는가?

   2) 지적된 한 학생을 A에 배치하고 나머지 9명을 A, B, C에 각각 3명씩 배치하는 방법은 몇가지인가?

9. 어떤 소조에 10명의 학생이 있는데 그중 3명이 녀학생이다. 2명의 학생을 뽑으려고 한다. 적어도 1명이 녀학생이 되게 하는 방법은 몇가지인가?

10. 서로 다른 $2n$개의 원소에서 n개씩 뽑은 조합가운데서 지적된 한 원소를 포함하는 조합의 수와 포함하지 않는 조합의 수는 같다는것을 증명하여라.

11. 자연수 n에 대하여 다음의 같기식이 성립한다는것을 증명하여라.

    1) $(1+2+\cdots+n)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\geq n^2$

    2) $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\leq\frac{x^n+y^n}{2}$ $(x>0,\ y>0)$　　3) $|\sin nx|\leq n|\sin x|$

12. 다음 공식을 증명하여라.

    1) $C_n^r=C_{n-1}^r+C_{n-2}^{r-1}+C_{n-3}^{r-2}+\cdots+C_{n-r}^1+1$

    2) $C_{n+1}^{r+1}=C_n^r+C_{n-1}^r+C_{n-2}^r+\cdots+C_{r+1}^r+C_r^r$

13. $\left(5x^2-\frac{1}{2x}\right)^9$의 전개식에서 x^3의 결수를 구하여라.

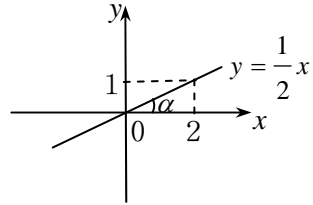
14. $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^n$의 전개식이 상수마디를 포함하려면 $n=3m$이여야 한다는것을 증명하고 이때의 상수마디를 m으로 표시하여라.(m은 자연수)

제2장. 평면도형의 방정식

제1절. 직선의 방정식

1. 방향결수에 의한 직선의 방정식

그림 2-1

알아보기 직선 $y=\frac{1}{2}x$에서 각결수 $\frac{1}{2}$은 각 α의 어느 삼각비와 같은가?

y축에 평행이 아닌 직선 l이 x축의 정방향과 θ만 한 각을 이룬다고 하자.

l//OM_1인 직선 OM_1을 그으면 직3각형 OM_1N에서

$$\angle M_1ON=\theta\ (\theta\neq\frac{\pi}{2})$$

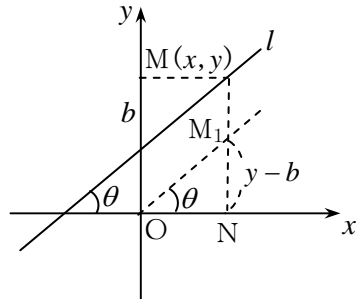
$$\tan\theta=\frac{M_1N}{ON}=\frac{y-b}{x}$$

그림 2-2

고쳐쓰면

$$y=\tan\theta\cdot x+b$$

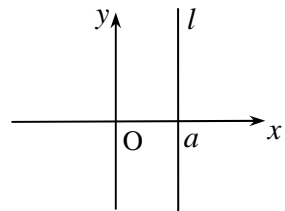
$k=\tan\theta$라고 놓으면

$$y=kx+b$$

점 M(x, y)가 l에 놓이지 않으면 그 자리표 x, y는 이 방정식을 만족시키지 않는다. 따라서 우의 방정식은 직선 l의 방정식이다.(k는 직선 l의 방향결수이다.)

이런 모양의 직선의 방정식을 방향결수에 의한 직선의 방정식이라고 부른다.

y 축에 평행인 직선의 방정식은 다음과 같다.

그림 2-3

$$x=a$$

례 1. 점 A(0, -2)를 지나며 x축의 정방향과 60° 의 각을 이루는 직선의 방정식을 구하여라.

(풀이) 구하려는 직선의 방정식을

$$y = kx + b$$

라고 하자. $k = \tan 60° = \sqrt{3}$ 이므로

$$y = \sqrt{3}x + b$$

그런데 구하려는 직선이 점 A(0, -2)를 지나므로

$$b = -2$$

이리하여 구하려는 직선의 방정식은

$$y = \sqrt{3}x - 2$$

문 제

1. x축에 평행인 직선의 방향결수는 0이고 y축에 평행인 직선은 방향결수를 가지지 않는다. 왜 그런가?

2. 다음과 같은 직선의 방정식을 구하여라.

1) 자리표원점 O(0, 0)을 지나고 x축의 정방향과 30° 의 각을 이루는 직선

2) 점 (0, 3)을 지나며 x축의 정방향과 각각 45° , 150° 의 각을 이루는 직선

3. 점 A(x_0, y_0)을 지나며 방향결수가 k인 직선의 방정식은

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

과 같이 쓸수 있다는것을 증명하여라.

2. 두 점을 지나는 직선의 방정식

알아보기 그림 2-4에서 직선 l이 두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)를 지날 때 이 직선의 방향결수는 얼마인가?

두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)를 지나는 직선 l의 방정식은 방향결수가 $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 이므로

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + b$$

이때 점 A(x_1, y_1)이 이 직선에 놓이므로

$$y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 + b$$

따라서

$$b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1$$

이므로 구하려는 직선 l의 방정식은

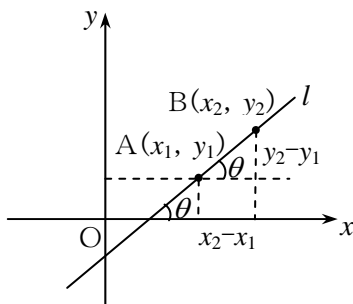
그림 2-4

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1$$

이것을 다시 고쳐쓰면

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

또는

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

례 2. 두 점 A(a, 0)과 B(0, b)를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

(풀이) 두 점을 지나는 직선의 방정식에 A와 B의 자리표를 넣으면

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0}$$

고쳐쓰면

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

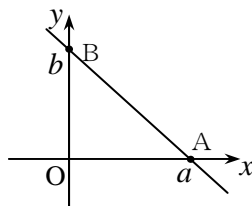



그림 2-5

문 제

1. 다음과 같은 직선의 방정식을 구하여라.
   1) 자리표원점 O(0, 0)과 점 M_0(2, −3)을 지나는 직선
   2) 두 점 A(−2, 0)과 B(3, 5)를 지나는 직선

2. 두 점 A(−3, 0)과 B(0, 2)를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

3. 다음 방정식으로 표시되는 직선을 그려라.

1) $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$ 2) $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$

3. 두 직선의 평행조건과 수직조건

두 직선 $l_1 : y = k_1 x + b_1$

$l_2 : y = k_2 x + b_2$

가 주어졌다.

그림 2-6

$l_1 // l_2$ 이면 분명히 $\varphi_1 = \varphi_2$ 이고 거꾸로 $\varphi_1 = \varphi_2$ 이면 $l_1 // l_2$ 이다.

그런데

$$\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow \tan\varphi_1 = \tan\varphi_2$$

즉 $k_1 = k_2$

이리하여 다음과 같은 두 직선의 평행조건을 얻는다.

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$$

만일 $l_1 \perp l_2$ 이면 분명히 $\varphi_2 = \varphi_1 \pm \frac{\pi}{2}$ 이고 거꾸로 $\varphi_2 = \varphi_1 \pm \frac{\pi}{2}$ 이면 $l_1 \perp l_2$ 이다.

그림 2-7

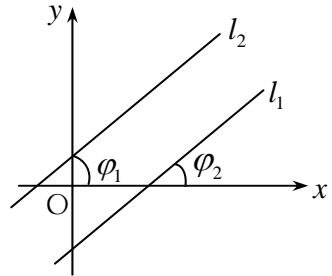
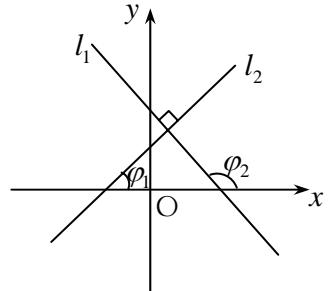
그런데

$$\varphi_2 = \varphi_1 \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\varphi_2 = \tan\left(\varphi_1 \pm \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\cot\varphi_1$$

즉 $k_2 = -\frac{1}{k_1}$

이리하여 두 직선의 수직조건은 다음과 같다.

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$$

례 3. 점 A(2, −3)을 지나며 직선 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

(풀이) 구하려는 직선의 방향결수를 k라고 하면

$$k\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1,\quad k=2$$

따라서 점 A(2,−3)을 지나고 방향결수가 $k=2$인 직선의 방정식은 $y-(-3)=2(x-2)$

즉 $y=2x-7$

4. 직선의 일반방정식

x, y에 관한 1차방정식

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0 \qquad (*)$$

이 직선의 방정식이라는것을 보자.

이제 A와 B가 동시에 령이 아닌 경우에 늘 직선의 방정식으로 된다는것을 고찰하자.

B≠0이면 (*)은

$$y=\left(-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right)x+\left(-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\right)$$

로 고쳐진다. 이것은 방향결수가 $k=-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$이고 점 $\left(0,\ -\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\right)$를 지나는 직선을 표시한다.

A≠0, B=0이면 우의 방정식은

$$x=-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}$$

로 되는데 이것은 x축의 점 $-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}$를 지나며 y축에 평행인 직선이다. 따라서 방정식 (*)은 직선의 방정식이다. 이 방정식 $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$을 직선의 일반방정식이라고 부른다.

례 4. 직선의 방정식 $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{5}$을 일반방정식으로 고쳐라.

(풀이) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{5}$을 $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$ 모양으로 고치면

$$5(x-3)=2(y+1)$$
$$5x-15=2y+2$$
$$5x-2y-17=0$$

따라서 이 직선의 일반방정식은

$$5x-2y-17=0$$

문 제

1. 다음과 같은 직선의 방정식을 구하여라.

1) 점 A(1, 0)을 지나며 직선 $2x+y+1=0$에 평행인 직선

2) 자리표원점 O를 지나며 직선 $x+y=3$에 수직인 직선

2. 두 직선 $A_1x+B_1y+C_1=0$과 $A_2x+B_2y+C_2=0$은 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$일 때 서로 평행이다. 왜 그런가?

련습문제

1. 점 A(1, 2)를 지나며 x축과 60°를 이루는 직선의 방정식을 구하여라.

2. 다음과 같은 직선의 방정식을 구하여라.

1) 원점 O와 점 (3, -2)를 지나는 직선

2) 두 점 A(5, 2), B(-3, 4)를 지나는 직선

3. 다음과 같은 직선의 방정식을 일반방정식으로 고쳐라.

1) $y=\frac{3}{5}x-5$ 2) $\frac{x-3}{3}=\frac{y+4}{7}$

4. 점 $M_1(4, -1)$를 지나고 직선 $x+2y+4=0$에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

5. 다음의 직선들에서 평행 또는 수직인 직선들을 찾아보아라.

1) $2x+3y-5=0$ 2) $3x-2y+6=0$

3) $-x+\frac{2}{3}y-4=0$ 4) $6x-4y-5=0$

6. 점 A(3, 0)을 지나며 직선 $2x+y+1=0$에 평행인 직선의 방정식을 구하여라.

7. 평행4변형의 린접한 두 변의 방정식이 $x-y-1=0$, $x-2y=0$이고 대각선의 사귐점이 M(3, −1)이다. 이 평행4변형의 다른 두 변의 방정식을 구하여라.

제2절. 2차곡선

1. 원둘레의 방정식

그림 2-8

자리표원점 O를 중심으로 하고 반경이 r인 원둘레의 방정식을 구하자. 원둘레의 임의의 점 M(x, y)를 취하여도(그림 2-8)

$$OM = r$$

이다. 따라서

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

결국 $$x^2 + y^2 = r^2$$

다음으로 원둘레밖의 임의의 점 N(x, y)을 잡아도

$$x^2 + y^2 \neq r^2$$

라는것을 증명할수 있다.

따라서 중심이 자리표원점에 있고 반경이 r인 원둘레의 방정식은

$$x^2 + y^2 = r^2$$

마찬가지로 중심이 $M_0(a, b)$에 있고 반경이 r인 원둘레의 방정식은

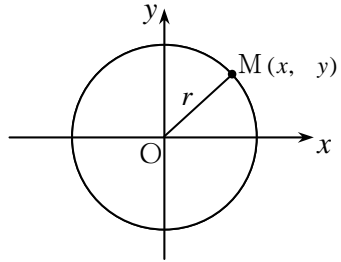
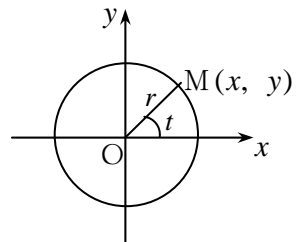
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

원둘레의 보조변수방정식

그림 2-9

중심이 O(0, 0)에 있고 반경이 r인 원둘레의 임의의 점 M(x, y)에 대하여 OM과 x축사이각을 t라고 하면

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \quad (0 \le t < 2\pi)$$

이다. 이 방정식을 t를 보조변수로 하는 원둘레의 보조변수방정식이라고 부른다.

문 제

1. 다음의 방정식들에서 원둘레의 중심과 반경을 구하여라.

1） $(x-a)^2+(y-5)^2=16$　　2） $(x+3)^2+(y+4)^2=11$

3） $(x-\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2=2$

2. 다음과 같이 중심과 반경이 주어진 원둘레의 방정식을 구하여라.

1） C(−1, −5), $r=\sqrt{7}$　　2） C(0, 4), $r=\sqrt{17}$

3） C(−3, 0), $r=\sqrt{3}$

3. 다음의 조건을 만족시키는 원둘레의 방정식들에서 k의 값을 구하여라.

1） $x^2+y^2-12x+8y+k=0$은 반경이 4인 원둘레이다.

2） $x^2+y^2+4x-2y+k=0$은 원둘레를 표시한다.

3） $x^2+y^2-6x+k=0$은 점을 표시한다.

4） $x^2+y^2+4x+ky+7=0$은 원둘레이다.

2. 타원의 방정식

평면에서 정해놓은 두 점 F_1, F_2까지의 거리의 합이 일정($2a$)한 점들의 모임으로 된 도형을 타원이라고 부른다. 이때 F_1, F_2를 타원의 초점이라고 부른다.

그림 2-10과 같이 선분 F_1F_2의 가운데점을 자리표원점 O로 정하고 직선 F_1F_2를 x축, O를 지나며 F_1F_2에 수직인 직선을 y축으로 잡자.

그림 2-10

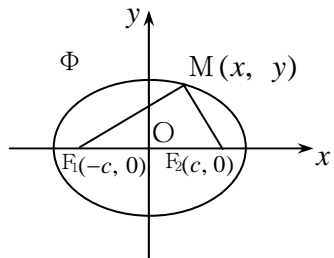
$$F_1F_2=2c(c<a)$$ 로 놓으면

$$F_1(-c,\ 0),\quad F_2(c,\ 0)$$

타원 Φ의 임의의 점을 M(x, y)라고 하면 즉 $M(x, y)\in\Phi$라고 하면

$$MF_1+MF_2=2a$$

그런데

$$MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\ MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

따라서

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

두 변을 2제곱하고 정돈하면

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

다시 두 변을 2제곱하고 정돈하면

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

그런데 $a>c>0$ 이므로 $a^2-c^2>0$

따라서 $a^2-c^2=b^2(b>0)$ 으로 놓으면

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

두 변을 a^2b^2 으로 나누면

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

다음으로

$$\mathrm{N}(x,\ y)\notin \Phi \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\neq 1$$

이라는것을 증명할수 있다.

따라서 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

이것을 타원의 표준방정식이라고 부른다.

타원이 x 축과 사귀는 점을 A, A_1, y 축과 사귀는 점을 B, B_1이라고 하면

$\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{A}_1(-a,\ 0)$

$\mathrm{B}(0,\ b)$, $\mathrm{B}_1(0,\ -b)$

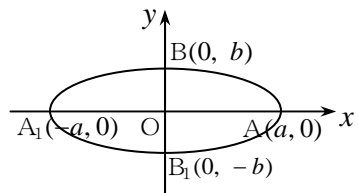



그림 2-11

이때 선분 AA_1을 타원의 **긴축**, 선분 BB_1을 타원의 짧은축이라고 부른다. 그리고 선분 OA(또는 그 길이 a), OB(또는 그 길이 b)를 각각 타원의 긴반경, 짧은반경이라고 부른다.

이제 원둘레의 방정식

$$x^2+y^2=a^2$$

에서 $M_1(x,\ y)$를 $M\left(x,\ \frac{b}{a}y\right)$으로 넘기자.

이때 M(X, Y)라고 하면

$$\begin{cases} X=x \\ Y=\frac{b}{a}y \end{cases}$$

따라서

$$X^2+\left(\frac{aY}{b}\right)^2=a^2$$

따라서

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$$

이것은 원둘레를 $MN=\frac{b}{a}M_1N$ 되게 압축하면 타원이 된다는것을 보여준다.(그림 2-12)

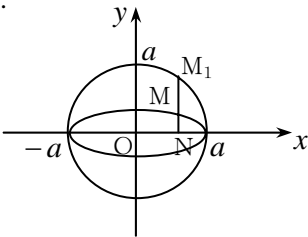
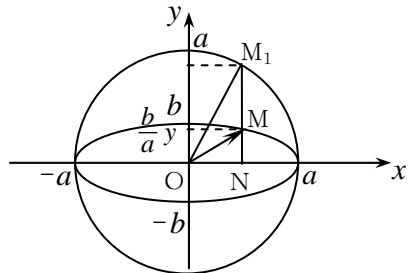



그림 2-12 그림 2-13

그림 2-13과 같은 원둘레 O에서 임의의 점 $M_1(x,\ y)$를 잡으면 다음 식이 성립한다는것을 알수 있다.

$$\begin{cases} x = a\cos\alpha \\ y = a\sin\alpha \end{cases}$$

이제 $X = x, \quad Y = \dfrac{b}{a}y$ 되게 압축하면 긴반경이 a, 짧은반경이 b인 타원이 된다. 그리하여 다음과 같은 타원의 방정식을 얻는다.

$$\begin{cases} X = a\cos\alpha \\ Y = b\sin\alpha \end{cases}$$

이 방정식을 타원의 보조변수방정식이라고 부른다.

(주의) 타원의 방정식

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

은 긴축이 y축에 놓이는 타원을 표시한다. 이때 이 타원의 초점은 y축에 놓인다.

문 제

1. 다음과 같은 긴반경과 짧은반경이 주어졌을 때 타원의 표준방정식, 보조변수방정식을 구하여라.

1) $a = 4, \quad b = 2$ 　　　 2) $a = \dfrac{1}{2}, \quad b = \dfrac{1}{3}$

2. 다음과 같은 타원의 방정식에서 보조변수방정식은 표준방정식으로 고치고 표준방정식은 보조변수방정식으로 고쳐라.

1) $\begin{cases} x = 3\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases}$ 　　　 2) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = 3\sin 2t \end{cases}$

3) $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ 　　　 4) $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{7} = 1$

3. 문제 2의 타원의 방정식으로부터 그 타원들의 초점의 자리표를 구하여라.

4. 다음의 방정식을 타원의 표준방정식으로 고치고 긴반경과 짧은반경, 초점의 자리표를 구하여라.

1) $x^2 + 4y^2 = 16$ 　　 2) $2x^2 + 3y^2 = 5$ 　　 3) $x^2 - 5 = -2y^2$

3. 쌍곡선의 방정식

쌍곡선의 방정식

평면에서 정해진 두 점 F_1, F_2까지의 거리의 차가 일정$(2a>0)$한 점들로 이루어지는 도형을 쌍곡선이라고 부른다. 여기서 점 F_1, F_2를 쌍곡선의 초점이라고 부른다.

그림 2-14와 같이 선분 F_1F_2의 가운데점을 자리표원점 O로 정하고 F_1F_2를 x축, O를 지나며 F_1F_2에 수직인 직선을 y축으로 잡자.

$F_1F_2=2c(c>0)$로 놓으면

$$F_1(-c,\ 0),\ F_2(c,\ 0)$$

그림 2-14

쌍곡선 Φ의 임의의 점을 $M(x,\ y)$라고 하면

즉 $M(x,\ y)\in\Phi$라고 하면

$$|MF_1-MF_2|=2a \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a$$

이 방정식에서 두 변을 2제곱하고 정돈하면

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=cx-a^2$$

다시 두 변을 2제곱하고 정돈하면

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

그런데 $c>a>0$이므로 $c^2-a^2>0$

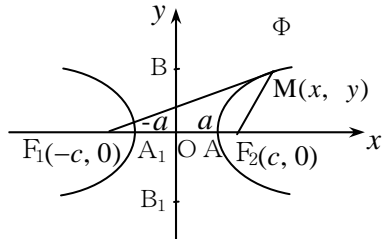
따라서 $c^2-a^2=b^2(b>0)$으로 놓으면

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

두 변을 a^2b^2으로 나누면

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

즉

$$M(x,\ y)\in\Phi\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

다음으로 $N(x,\ y)\notin\Phi\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\neq1$을 증명할수 있다.

따라서 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

이것을 쌍곡선의 표준방정식이라고 부른다.

이때 선분 AA_1을 실축, 선분 OA(또는 그 길이 a)를 실반경이라고 부른다.

두 점 B(0, b), B_1(0, $-b$)를 잡았을 때 선분 BB_1을 허축, 선분 OB (또는 그 길이 b)를 허반경이라고 부른다.

쌍곡선은 3개의 관측소를 가지고 지진이 일어난 진원의 위치를 확정하는데 리용할수 있다.

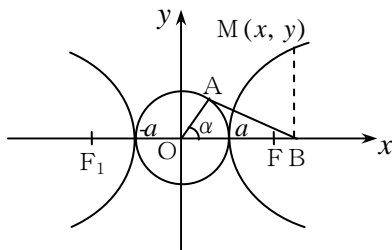
실례로 한 직선에 놓이지 않는 3개의 위치 F, F_1, F_2에 관측소가 있다. 지진이 발생하였을 때 초소 F_1에서는 F에서보다 t_1 초후에, 초소 F_2에서는 F에서보다 t_2 초후에 지진이 관측되였다고 한다. 지진의 진원을 구하여라.

쌍곡선의 보조변수방정식을 구하여보자.

그림 2-15와 같이 중심이 O이고 반경이 a 인 원 O(a)를 그리자.

쌍곡선의 임의의 점 M(x, y)에서 x축에 수직선을 긋고 그와 사귀는 점을 B라고 하자.

그림 2-15

B에서 원 O(a)에 접선 BA를 긋자. 이때 $\angle AOB=\alpha$ 라고 하면 쌍곡선의 오른쪽가지의 점 M과 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$사이에는 1대1대응이 있다.

이때 $\mathrm{OB}=x=a\sec\alpha$

이것을 쌍곡선의 방정식에 넣어 y를 구하자.

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2\sec^2\alpha-a^2}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2(\sec^2\alpha-1)}$$
$$=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2\tan^2\alpha}=\pm b\tan\alpha$$

즉 $y=b\tan\alpha$

따라서 쌍곡선의 오른쪽가지의 보조변수방정식

$$\begin{cases}x=a\sec\alpha\\ y=b\tan\alpha\end{cases},\quad \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$$

이 나온다.

쌍곡선의 왼쪽가지에 대해서는 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$인 α에 대하여 우의 보조변수방정식이 성립한다는것을 알수 있다.

따라서 **쌍곡선의 보조변수방정식**은

$$\begin{cases}x=a\sec\alpha\\ y=b\tan\alpha\end{cases},\quad \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$$

쌍곡선의 점근선

쌍곡선의 방정식을 고쳐쓰면

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

1사분구에 있는 쌍곡선의 가지 $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\ (x\geq a)$와 함께 직선 $y=\frac{b}{a}x$를 살펴보자.(그림 2-16)

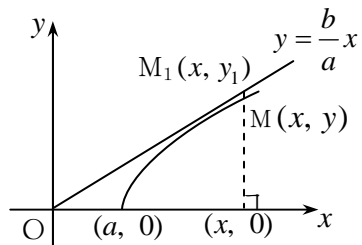



그림 2-16

$$\frac{b}{a}x>\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

이므로 x자리표가 같은 쌍곡선과 직선의 점을 각각 $M(x,\ y)$, $M_1(x,\ y_1)$이라고 하면 $y_1>y$이므로 쌍곡선은 직선 $y=\frac{b}{a}x$아래에 놓인다. 그리고

$$y_1 - y = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2})$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

즉 x가 커짐에 따라 쌍곡선이 직선 $y = \frac{b}{a}x$에 끝없이 가까와간다.

이때 이 직선을 쌍곡선의 점근선이라고 부른다.

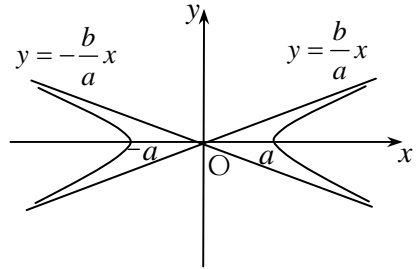
그림 2-17에서 보는것처럼 쌍곡선

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

에는 두개의 점근선

$$y = \pm\frac{b}{a}x \text{가 있다.}$$

그림 2-17

문 제

1. 다음과 같은 쌍곡선의 표준방정식, 보조변수방정식을 구하여라.

1) $a = 2,\ \ b = 3$　　2) $b = 4,\ \ c = 5$　　3) $a = 3,\ \ c = 4$

2. 다음 곡선의 방정식을 표준방정식으로 고치고 자리표원점으로부터 초점까지의 거리를 구하여라.

1) $9x^2 - 16y^2 = 144$　　2) $3x^2 - \frac{1}{4}y^2 = 4$

3) $2x^2 = 15 + 7y^2$　　4) $6x^2 - 12 = 9y^2$

3. 다음 쌍곡선의 점근선의 방정식을 구하고 그림을 그려라.

1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$　　2) $25x^2 - 16y^2 = 400$

4. 포물선의 방정식

평면에서 정해놓은 점 F와 정해놓은 직선 l까지의 거리가 같은 점들로 이루어진 도형을 포물선이라고 부른다. 이때 점 F를 포물선의 초점, 직선 l을 포물선의 준선이라고 부른다.

포물선의 방정식을 구하자.

초점 F에서 준선 l 에 수직선 FK를 긋고 FK의 가운데점 O를 자리표원점으로 정하자. 그리고 직선 FK를 x 축, O를 지나며 KF에 수직인 직선을 y 축으로 잡자.(그림 2-18)

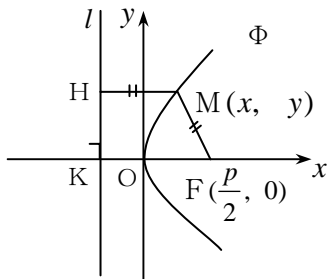



그림 2-18

KF $= p$ 라고 하면 $\mathrm{F}\left(\dfrac{p}{2},\ 0\right)$ 이고 l

의 방정식은 $x = -\dfrac{p}{2}$ 이다. 준선이 l 이고 초점이 F인 포물선을 Φ 라고 하자.

$\mathrm{M}(x,\ y) \in \Phi$ 이면 MH＝MF

그런데

$$\mathrm{MH} = \left|x + \frac{p}{2}\right|,\quad \mathrm{MF} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

이므로

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

이 방정식의 두 변을 2제곱하고 정돈하면

$$y^2 = 2px$$

즉 $\mathrm{M}(x,\ y) \in \Phi \Rightarrow y^2 = 2px$

다음으로 $\mathrm{N}(x,\ y) \notin \Phi \Rightarrow y^2 \neq 2px$ 라는것을 증명할수 있다.

따라서 포물선의 방정식은

$$y^2 = 2px$$

이것을 포물선의 표준방정식이라고 부른다.

포물선 $y^2 = 2px$ 에서 $(\pm y)^2 = 2px$ 이므로 x 축이 대칭축이라는것을 알수 있다.

포물선과 대칭축과의 사귐점을 포물선의 정점이라고 부른다.

포물선 $y^2=2px$ 는 p 에 따라 다음과 같은 모양을 가진다.(그림 2-19)

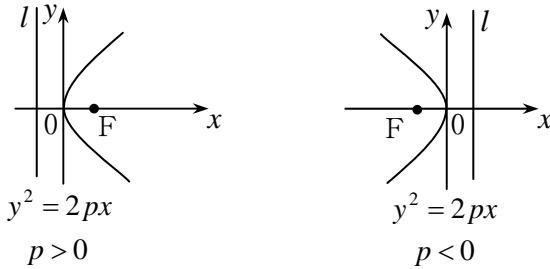



그림 2-19

또한 포물선의 방정식은 $x^2=2py$ 와 같이 구할수도 있다.(그림 2-20)

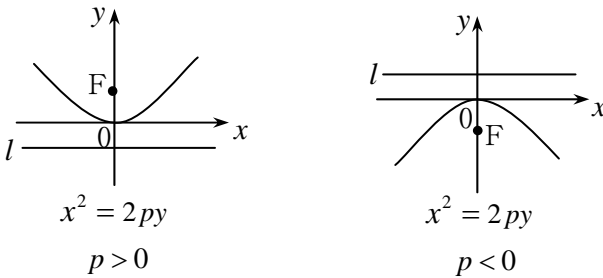



그림 2-20

포물선 $x^2=2py$ 에서는 y 축이 대칭축이다.

다음으로 포물선의 보조변수방정식을 구해보자.

포물선 $y^2=2px$ 에서 $y=a,\ \ a\in\mathrm{R}$ 로 놓으면

$$x=\frac{a^2}{2p}$$

따라서 포물선의 보조변수방정식은

$$\begin{cases} x=\dfrac{a^2}{2p} \\ y=a \end{cases}$$

지금까지 배운 원둘레, 타원, 쌍곡선, 포물선은 원뿔면을 자를 때 생긴다.

그림 2-21에서와 같이 원뿔의 옆면을 축에 수직인 평면으로 자르면 원이 생기고 모든 모선과 사귀면서 축에 경사지게 자르면 타원이 생기고 축에 평행인 평면으로 자르면 쌍곡선이 생긴다. 또한 한 모선에 평행인 평면으로 자르면 포물선이 생긴다.

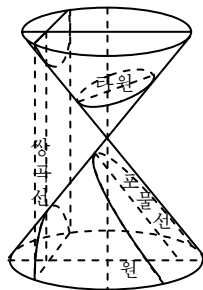



그림 2-21

그러므로 원둘레, 타원, 쌍곡선, 포물선을 통털어서 원뿔곡선이라고도 부른다.

문 제

1. 다음과 같은 포물선의 표준방정식, 보조변수방정식을 구하여라.

1) $p=4$, x축을 대칭축으로 하고 y축의 오른쪽반평면에 있다.

2) $p=6$, y축을 대칭축으로 하고 x축의 웃쪽반평면에 있다.

2. 다음과 같은 포물선의 방정식을 표준방정식으로 고치고 p를 구하여라. 그리고 그림을 그려라.

1) $\frac{1}{8}y^2=x$ 2) $3y^2=2x$ 3) $3x^2=-4y$

4) $6x-y^2=0$ 5) $x^2+5y=0$

3. 자리표평면에서 점 F(0, 3)을 초점으로 하고 직선 $y=-5$를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 구하고 이 곡선의 정점을 구하여라.

4. 포물선 $y=x^2$의 점으로부터 직선 $2x-y-4=0$까지의 거리가 가장 짧은 점의 자리표를 아래에서 찾아라.

1) $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ 2) $\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{4}\right)$ 3) (2, 4) 4) (1, 1)

련습문제

1. 중심이 (3, −3)이고 반경이 3인 원둘레의 방정식을 구하고 이것을 $\frac{2}{3}$로 압축하여 얻은 타원의 방정식을 구하여라.

2. 다음의 2차곡선의 방정식을 표준방정식으로 고쳐라.

   1) $4x^2+y^2=16$ 2) $x^2-2y^2+4=0$ 3) $6x-y^2=0$

   4) $4x^2=16+y^2$ 5) $x^2+5y=0$ 6) $2x^2=18-9y^2$

3. 다음의 조건을 만족시키는 2차곡선의 표준방정식을 구하여라.

   1) $a=4,\ c=3$인 타원

   2) $c=3$, 두 점근선사이의 각이 $90°$ 인 쌍곡선

   3) 준선의 방정식이 $y=-3$인 포물선

4. 반경이 r 인 원둘레 O와 그안에 한 점 p 가 있다. 점 p 를 지나며 원둘레 O에 접하는 모든 원둘레의 중심들의 모임은 타원이다. 증명하여라.

5. 대칭축이 자리표축과 겹치고 리심률이 $e=0.8$ 이며 초점과 준선사이의 거리가 $\frac{9}{4}$인 타원의 방정식을 구하여라.

6. 이동점 M에서 고정점 A(1, 1)까지의 거리와 점 M에서 고정점 B(−1, 1)까지의 거리를 던 차가 부 아닌 실수 a (상수)이다. 이때 이동점 M의 자리길을 아래에서 찾아보아라.

   1) 쌍곡선의 한가지

   2) 쌍곡선의 한가지 또는 하나의 직선

   3) 쌍곡선의 한가지 또는 하나의 직선 또는 하나의 선

   4) 3)을 제외하고 또 다른 경우가 있다.

7. 타원 $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ 의 초점을 지나고 타원이 x 축과 사귀는 점들을 초점으로 하는 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

8. 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 의 왼쪽초점으로부터 거리가 7인 쌍곡선의 점을 구하여라.

9. 그림 2-22를 보고 쌍곡선을 그리는 방법을 설명하고 그 근거를 밝혀라.

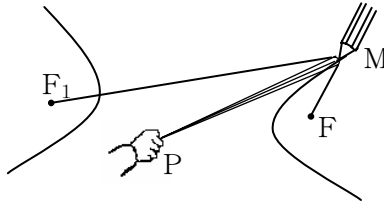



그림 2-22

복습문제

1. 다음과 같은 직선의 방정식을 구하여라.

1) 점 M(0, 3)을 지나며 방향결수가 $k=\frac{1}{2}$인 직선

2) 점 M(2, -1)을 지나며 방향결수가 $k=-3$인 직선

3) 점 M(-3, 1)을 지나며 x축의 정방향과 -45° 를 이루는 직선

4) 두 점 M(5, -3)과 N(-2, 0)을 지나는 직선

2. 다음과 같은 방정식으로 표시되는 직선의 y축과의 사귐점과 방향결수를 구하여라.

1) $x-y+2=0$　　2) $-2x+5y+3=0$

3) $2y-6=0$　　4) $-3x-2=0$

3. 다음과 같은 직선의 방정식을 방향결수에 의한 방정식으로 고치고 그것들을 그려라.

1) $x+5y-3=0$　　2) $-3x+2y=0$

3) $2y-7=0$　　4) $3x+5=0$

4. 방정식 $x-2y+1=a$에서

1) $a=-1$, 0, 3일 때 각각 이 방정식으로 표시되는 직선을 그려라.

2) a 의 값이 커질수록 이 방정식으로 표시되는 직선은 어떻게 그려지는가?

5. 점 M(3, -2)을 지나며 직선 $x-y+6=0$ 에 평행인 직선과 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

6. 점 M(5, -2)를 지나며 직선 $2x+3y+5=0$ 에 평행인 직선과 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

7. 두 점 A(3, 5)와 B(-3, 4)가 주어졌다. 점 C(-2, 1)를 지나면서 직선 AB에 평행인 직선의 방정식을 구하여라.

8. 두 직선 $kx-y-9=0$ 과 $2x+y+5=0$ 이 평행이라면 k 는 어떤 값을 가지는가?

9. 직선 $(2m-n+1)x+(m+n-2)y-4n-5=0$ 이 y 축에 평행이고 x축과 점 A(2, 0)에서 사귀도록 m, n의 값을 정하여라.

10. 중심이 (0, 0)이고 점 M(3, 2)를 지나는 원둘레의 방정식을 구하여라.

11. 다음의 방정식은 어떤 도형을 표시하는가?

1) $x^2+y^2-4y=0$ 2) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$

12. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 에서 $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 을 리심률이라고 부른다.

1) 타원 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$의 리심률은 얼마인가?

2) $0<e<1$ 임을 증명하여라.

3) 원둘레는 《리심률이 0》인 타원이라고 생각할수 있다. 왜 그런가?

4) $a=10$, $e=0.98$ 인 타원에서 b 를 구하고 타원을 그려라.

제3장. 도함수와 그 응용

제1절. 극한과 련속

1. 수렬의 극한

알아보기 다음 수렬들에서 마디의 번호가 끝없이 커질 때 매 마디의 값이 어디로 다가가는가?

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$$

> 수렬 (a_n)에서 마디의 번호 n이 끝없이 커질 때 a_n이 일정한 수 a로 얼마든지 가까와가면 수렬 (a_n)은 수 a로 **수렴한다고** 말하고 다음과 같이 표시한다.
>
> $$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{또는} \quad a_n \to a(n\to\infty)$$
>
> 그리고 수 a를 수렬 (a_n)의 **극한이라고** 부른다.

례 1. 1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

2) $a_n=\frac{n+1}{n}$일 때 $a_n=1+\frac{1}{n}$이므로 n이 끝없이 커질 때 a_n은 1에 수렴한다.

즉

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

수렬이 수렴하지 않으면 그 수렬은 **발산한다고** 말한다.

수렬 2, 4, 6, …, $2n$에서와 같이 n이 끝없이 커질 때 마디의 값이 얼마든지 커지면 수렬은 **무한대로 발산한다고** 말한다.

또한 수렬 3, -3, 3, -3, … 에서와 같이 마디가 몇개의 값을 차례로 되풀이하여 잡으면서 일정한 수로 가까와가지 않으면 수렬은 **진동발산한다고** 말한다.

문 제

1. 다음 수렬가운데서 수렴하는 수렬을 갈라내고 그 극한이 얼마인가를 말하여라.

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$　　2) 2, 2, 2, ⋯

3) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$　　4) 1, 4, 9, 16, ⋯

2. 다음 수렬들가운데서 수렴하는 수렬과 발산하는 수렬을 갈라내여라.

1) 5, 3, 1, −1, ⋯　　2) 0.9, 0.99, 0.999, ⋯

3) $\sin\frac{\pi}{2}, \sin\pi, \sin\frac{3}{2}\pi, \sin 2\pi, \cdots$　　4) 3, −9, 27, −81, ⋯

수렬의 극한에 관한 다음 성질을 쓰면 수렬의 극한을 쉽게 구할수 있다.

수렬의 극한의 성질
$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \ \lim_{n\to\infty} b_n = b$ 이면
(1) $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim_{n\to\infty} a_n = ca$ (c 는 상수)
(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b$
(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$
(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b} \ (\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0)$

성질 (2), (3)은 3개이상의 수렬에 대해서도 그대로 성립한다. 즉

(2)′ $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n \pm c_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n \pm \lim_{n\to\infty} c_n$

(3)′ $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n \cdot c_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \cdot \lim_{n\to\infty} c_n$

례 2. 1) $\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}5+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=5+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$

$=5+0\cdot0=5$

2) $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{2}{n}\right)$

$=(1+0)(2+0)=2$

례 3. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2+2n+3}$을 구하여라.

(풀이) 이 경우에는 다음과 같이 고쳐서 상의 극한에 관한 성질을 쓴다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2+2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}=\frac{2}{3}$$

례 4. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$를 구하여라.

(풀이) 이 경우에는 차의 극한에 관한 성질을 직접 쓸수 없다. 다음과 같이 고쳐서 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=0\cdot\frac{1}{2}=0$$

문 제

1. 다음 극한을 구하여라.

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{5n-2}{n}$ 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}$

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+1}$ 4) $\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{(n+1)(n+2)}$

2. 다음 극한을 구하여라.

1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$ 2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

3) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-3n+5}-n)$

2. 무한같은비수렬의 합

첫째 마디가 $a\,(\neq 0)$, 공통비가 $q(\neq 0)$인 무한같은비수렬

$$a,\quad aq,\quad aq^2,\quad \cdots, aq^{n-1},\quad \cdots$$

에서 처음 n개 마디의 합을

$$S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1}$$

로 표시하면 $n=1$, 2, 3, $\cdots$일 때 수렬

$$S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$$

이 얻어진다. 이 수렬이 수렴하면 극한

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

를 무한같은비수렬 (aq^{n-1})의 합이라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$S = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$$

또는

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$$

(1) $|q|\neq 0$일 때

같은비수렬의 합의 공식을 쓰면

$$S_n = \frac{a-a\,q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\cdot q^n$$

그런데 $|q|<1$이면

$$|q|>|q|^2>|q|^3>\cdots>|q|^n>\cdots$$

이고 n이 끝없이 커감에 따라 $|q|^n$은 0에 얼마든지 가까와진다. 즉

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q}-\frac{a}{1-q}\cdot q^n\right)=\frac{a}{1-q}$$

즉

$$S=\frac{a}{1-q}$$

다음으로 $|q|>1$ 이면

$$|q|<|q|^2<|q|^3<\cdots<|q|^n<\cdots$$

이고 n 이 끝없이 커감에 따라 $|q|^n$ 은 얼마든지 커진다. 따라서 (S_n)은 발산한다. 즉 $|q|>1$ 일 때 무한같은비수렬은 합을 가지지 않는다.

(2) $|q|=1$ 일 때

$q=1$ 이면 $S_n=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n개}=na$

$q=-1$ 이면 $S_n=a\underbrace{-a+a-a+\cdots(-1)^{n-1}\cdot a}_{n개}$

이므로 어느 경우나 (S_n)은 수렴하지 않는다. 따라서 이 경우에도 무한같은비수렬은 합을 가지지 않는다.

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}=\begin{cases}\dfrac{a}{1-q}, & |q|<1\\ 발산, & |q|\geq 1\end{cases}$$

례 1. 무한같은비수렬

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \cdots$$

의 합을 구하여라.

(풀이) $a=1,\ |q|=\dfrac{1}{2}<1$ 이므로

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

즉 $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=2$$

무한같은비수렬의 합의 공식을 쓰면 순환소수를 쉽게 분수로 고칠수 있다.

례 2. 순환소수 0.(7)을 분수로 고쳐라.

(풀이) $0.(7)=0.777\cdots=0.7+0.07+0.007+\cdots$

$$=\frac{7}{10}+\frac{7}{10^2}+\frac{7}{10^3}+\cdots$$

이것은 $a=\frac{7}{10}$, $q=\frac{1}{10}$인 무한같은비수렬의 합이다.

따라서

$$0.(7)=\frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{7}{9}$$

문 제

1. 다음 합을 구하여라.

1) $\sum_{k=0}^{\infty}0.2^k$　　2) $\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n}$　　3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{10^n}$

2. 다음 순환소수를 분수로 고쳐라.

1) 0.(13)　　2) 0.4(23)　　3) 1.2(12)

3. 다음 극한을 구하여라.

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2-2^n}{2+5^n}$　　2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{1-4^n}$　　3) $\lim_{n\to\infty}\frac{5+3^n}{2^{2n}}$

3. 함수의 극한

일정한 압력밑에서 물체의 온도를 점점 낮추어 -273℃에 가까와가면 물체의 분자들의 운동은 정지상태에 들어간다. 이것은 물체의 온도 T(절대온도)가 련속적으로 변하면서 －273℃에 끝없이 가까와갈 때 물체의 분자들의 운동속도 v가 얼마든지 0에 가까

와간다는것을 보여준다. 과학과 기술에서는 이와 같이 독립변수가 일정한 값으로 련속적으로 끝없이 가까와갈 때 함수값의 변화를 살펴보아야 할 경우가 많다.

례 1. 함수 $f(x)=2x-1$ 에서 변수 x 가 2에 끝없이 가까와갈 때 함수값의 변화를 살펴보자.

변수 x가 2에 가까와지는 방법에는 여러가지가 있다. 2보다 큰 값을 잡으면서 갈수도 있고 작은 값을 잡으면서 갈수도 있다. 또한 2보다 큰 값과 작은 값을 엇바꾸어 잡으면서 갈수도 있다.

다음 표에서는 2보다 작은 값과 2보다 큰 값을 각각 잡으면서 2에 가까와지는 경우에 함수 $f(x)$ 의 값의 변화를 보여주고있다.

x	1.9	1.99	1.999	1.999 9⋯ → 2
$f(x)$	2.8	2.98	2.998	2.999 8⋯ → 3

x	2.1	2.01	2.001	2.000 1⋯ → 2
$f(x)$	3.2	3.02	3.002	3.000 2⋯ → 3

변수 x 가 아무런 방법으로나 2에 끝없이 가까와가도 $f(x)$ 의 값은 3에 얼마든지 가까와간다는것을 알수 있다.(그림 3-1)

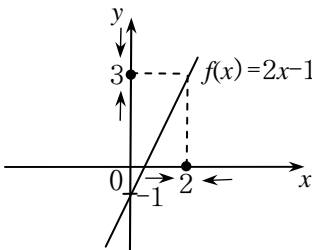



그림 3-1

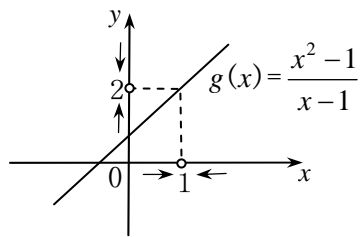



그림 3-2

례 2. 함수 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 는 $x=1$ 에서 뜻을 가지지 않지만 $x\neq1$인 모든 x에서 $x-1\neq0$ 이므로

$$g(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

따라서 $x\neq1$이면서 x가 아무런 방법으로나 1에 끝없이 가까와갈 때 함수 $g(x)$의 값은 2에 얼마든지 가까와간다. (그림 3-2)

함수 $f(x)$가 점 a의 충분한 가까이에서 늘 뜻을 가진다고 하자.

> 변수 x가 아무런 방법으로나 수 a에 끝없이 가까와가도($x\neq a$) 함수 $f(x)$의 값이 늘 일정한 수 A에 얼마든지 가까와가면 함수 $f(x)$는 x가 a로 가까와갈 때 수 A로 **수렴한다**고 말하고 다음과 같이 표시한다.
>
> $$\lim_{x\to a}f(x)=\mathrm{A} \quad 또는 \quad f(x)\to\mathrm{A}(x\to a)$$
>
> 그리고 수 A를 점 a에서 함수 $f(x)$의 **극한**이라고 부른다.

함수의 극한표시에서 기호 $x\to a$는 x가 $x\neq a$이면서 a에 끝없이 가까와간다는것을 직관적으로 표시한것이다.

우에서 본 례들은 극한기호를 써서 각각 다음과 같이 표시할수 있다.

$$\lim_{x\to2}(2x-1)=3,\quad \lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

$x\to a$일 때 함수 $f(x)$가 수렴하지 않으면 함수 $f(x)$는 $x\to a$일 때 **발산한다**고 말한다.

례 3. 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$은 $x\to0$일 때 그 절대값이 얼마든지 커지면서 일정한 값으로 가까와가지 않는다. 따라서 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$은 $x\to0$일 때 발산한다.

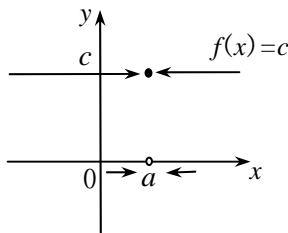
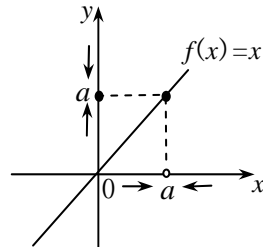



그림 3-3　　　그림 3-4

그림에서 쉽게 알수 있는바와 같이

$$\lim_{x\to a} c = c \ (c \text{ 는 상수})$$

$$\lim_{x\to a} x = a$$

문 제

1. 다음 함수의 극한을 구하여라.

1) $\lim_{x\to 2}(5-x)$ 2) $\lim_{x\to -1}\frac{5x+1}{3x}$

3) $\lim_{t\to -2} 0.2t$ 4) $\lim_{x\to 1}\cos\frac{3}{2}\pi x$

2. 함수 $f(x)=\frac{2}{x+1}$ 에서 x 가 −1에 끝없이 가까와갈 때 함수값이 일정한 수로 《수렴한다》고 말할수 있는가?

3. 다음 극한이 있는가?

1) $\lim_{x\to -2}\frac{1}{(x+2)^2}$ 2) $\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-9}$

3) $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 4) $\lim_{x\to a}\cos\frac{1}{x-a}$

함수의 극한에서는 다음 사실이 성립한다.

함수의 극한의 성질

$\lim_{x\to a} f(x) = \mathrm{A}$, $\lim_{x\to a} g(x) = \mathrm{B}$ 이면

(1) $\lim_{x\to a} kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x) = k\mathrm{A}$ (k 는 상수)

(2) $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = \mathrm{A}\pm\mathrm{B}$

(3) $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x) = \mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$

(4) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ $(\lim_{x\to a} g(x) = \mathrm{B} \neq 0)$

성질 (2), (3)은 3개이상의 함수에 대해서도 성립한다. 즉

(2)′ $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)\pm h(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)\pm\lim_{x\to a}h(x)$

(3)′ $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)\cdot\lim_{x\to a}h(x)$

우에서 든 극한의 성질을 쓰면 함수의 극한계산을 쉽게 할수 있다.

례 4. 1) $\lim_{x\to 1}(3x+2)=\lim_{x\to 1}3x+\lim_{x\to 1}2=3\lim_{x\to 1}x+2=3\cdot 1+2=5$

2) $\lim_{x\to 2}x^2=\lim_{x\to 2}(x\cdot x)=\lim_{x\to 2}x\cdot\lim_{x\to 2}x$

$$=(\lim_{x\to 2}x)^2=2^2=4$$

일반적으로

$$\lim_{x\to a}x^n=(\lim_{x\to a}x)^n=a^n$$

례 5. 1) $\lim_{x\to 2}(2x^2+3x+5)=2\lim_{x\to 2}x^2+3\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5$

$$=2\cdot 2^2+3\cdot 2+5=19$$

2) $\lim_{x\to -2}[(3x+1)(x^2-2x+1)]=\lim_{x\to -2}(3x+1)\cdot\lim_{x\to -2}(x^2-2x+1)$

$$=(3\lim_{x\to -2}x+\lim_{x\to -2}1)\cdot(\lim_{x\to -2}x^2-2\lim_{x\to -2}x+\lim_{x\to -2}1)$$

$$=[3\cdot(-2)+1]\cdot[(-2)^2-2\cdot(-2)+1]=(-5)\cdot 9=-45$$

일반적으로 $f(x)$가 x에 관한 옹근식으로 표시된 함수이면

$$\boxed{\lim_{x\to a}f(x)=f(a)}$$

례 6. 다음 극한을 구하여라.

1) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x+2}{3x^2-1}$ 2) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$

(풀이) 1) $\lim_{x\to 1}(x+2)=1+2=3$

$\lim_{x\to 1}(3x^2-1)=3\cdot 1^2-1=2\neq 0$ 이므로

성질 (4)에 의하여

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{3x^2-1}=\frac{\lim_{x\to 1}(x+2)}{\lim_{x\to 1}(3x^2-1)}=\frac{3}{2}$$

2) $\lim_{x\to1}(x^2+x-2)=1^2+1-2=0$

$\lim_{x\to1}(x^2+2x-3)=1^2+2\cdot1-3=0$

이므로 성질 (4)를 직접 쓸수 없다.

이 경우에는 $x-1\neq0$ 이므로 다음과 같이 고쳐서 계산한다.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x+3}$$

$$=\frac{\lim_{x\to1}(x+2)}{\lim_{x\to1}(x+3)}=\frac{3}{4}$$

례 7. $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ 를 구하여라.

(풀이) 이 경우에도 분자와 분모의 극한이 다 0이므로 상의 극한에 관한 성질을 쓸수 없다. 이 경우에는 다음과 같이 분모를 유리화하고 계산한다.

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x}=\lim_{x\to0}(\sqrt{x+1}+1)=2$$

문 제

1. 다음 극한을 구하여라.

1) $\lim_{x\to1}(2x^2-3x+1)$

2) $\lim_{x\to-3}(x^2+5x-1)$

3) $\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x^2-2}$

4) $\lim_{x\to-3}\frac{2x^2-x-3}{x+1}$

2. 다음 극한을 구하여라.

1) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$

2) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

3) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$

4) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2-2x+2}-1}{x-1}$

3. 다음 함수의 극한이 있는가?

1） $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$　　　　　　　　2） $\lim\limits_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$

4. $x \to 0$일 때 $\frac{\sin x}{x}$의 극한

그림에서 쉽게 알수 있는바와 같이

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

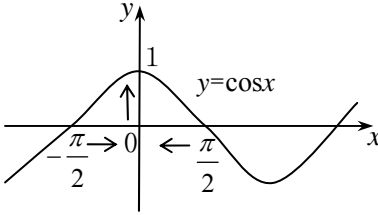
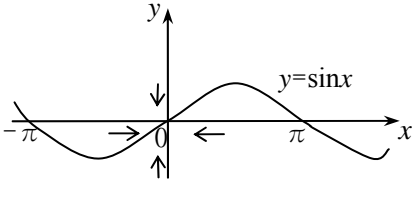



그림 3-5　　　　　　　　그림 3-6

이제 $x \to 0$일 때 $\frac{\sin x}{x}$의 극한을 계산하자. 여기서 x는 각의 라디안수를 표시한다.

$x \to 0$일 때 분자와 분모의 극한이 다 0이므로 상의 극한에 관한 성질을 쓸수 없다.

다음과 같은 방법으로 극한을 구한다.

먼저 $0 < x < \frac{\pi}{2}$이면서 $x \to 0$인 경우를 보자. 단위원을 그리고 중심각이 x인 활등 $\overset{\frown}{AB}$를 잡자. （그림 3-7）

△AOB, 부채형 OAB, △AOT의 면적을 비교하면

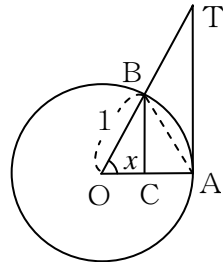



그림 3-7

$$S_{\Delta AOB} < S_{부채형 OAB} < S_{\Delta AOT}$$

CB=sin$x$, AT=tan$x$라는것을 고려하면

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\sin x,\quad S_{\text{부채형}OAB}=\frac{1}{2}x,\quad S_{\Delta AOT}=\frac{1}{2}\tan x$$

이므로

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$$

그런데 $0<\sin x<1\,(0<x<\frac{\pi}{2})$ 이므로

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

즉

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$$

그런데 $\lim_{x\to 0}1=1,\ \lim_{x\to 0}\cos x=1$ 이므로 가운데 끼운 $\frac{\sin x}{x}$ 도 $x\to 0\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 일 때 1로 수렴할수밖에 없다. 즉

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

이번에는 $-\frac{\pi}{2}<x<0$ 이면서 $x\to 0$ 인 경우를 보자.

이 경우에 $x=-x_1(x_1>0)$ 이라고 놓으면

$$x\to 0\left(-\frac{\pi}{2}<x<0\right)\Leftrightarrow x_1\to 0\left(0<x_1<\frac{\pi}{2}\right)$$

이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x_1\to 0}\frac{\sin(-x_1)}{-x_1}=\lim_{x_1\to 0}\frac{-\sin x_1}{-x_1}=\lim_{x_1\to 0}\frac{\sin x_1}{x_1}=1$$

이리하여 아무런 방법으로나 $x\to 0$ 일 때

$$\frac{\sin x}{x}\to 1$$

즉

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

안같기식

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

로부터

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

이라는것도 곧 알수 있다.

이 극한들을 써서 삼각함수가 들어있는 일련의 함수의 극한을 쉽게 구할수 있다.

례 1. 1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=3\cdot 1=3\,(t=3x)$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\,\frac{2x}{\sin 2x}\right)=\frac{5}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{5}{2}$

례 2. 1) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1$$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

문 제

1. 다음 극한을 구하여라.

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}$　　2) $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\tan 3x}$

3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}$　　4) $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$

2. 다음 극한을 구하여라.

1) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-6x\right)}{5x}$

3) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1+x)}{1+x}=1$ 이 옳은가?

5. 함수의 련속성

알아보기 다음것이 옳은가?

1) 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 뜻을 가지지 않으면 $x=a$ 에서 극한을 가지지 않는다.

2) 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 뜻을 가지고 극한이 있으면 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ 이다.

3) $x=a$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그라프가 끊어지지 않고 이어져있으면 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극한을 가진다.

함수의 련속의 개념은 함수의 극한개념과 밀접한 관계를 가진다.

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

일 때 함수 $f(x)$ 는 점 $x=a$ 에서 **련속**이라고 말한다.

함수 $f(x)$ 가 점 $x=a$ 에서 련속이기 위해서는 다음 세 조건을 만족시켜야 한다.

1) $f(x)$ 가 점 $x=a$ 에서 뜻을 가져야 한다.

2) 극한 $\lim_{x\to a}f(x)=\mathrm{A}$ 가 있어야 한다.

3) $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ 이여야 한다.

함수 $f(x)$ 가 점 $x=a$ 에서 련속이 아닐 때 점 a 를 함수 $f(x)$

의 불련속점이라고 부른다.

함수가 주어진 점에서 련속인가 련속이 아닌가 하는것은 직관적으로 그라프가 주어진 점에서 끊어지지 않고 이어졌는가 또는 끊어져서 떨어졌는가 하는것과 같다.

례 1. $f(x)=3x^2+x$ 는 점 $x=3$에서 련속이다.

사실 $f(3)=3\cdot3^2+3=30$

$$\lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}(3x^2+x)=3\cdot3^2+3=30$$

이므로

$$\lim_{x\to3} f(x)=f(3)$$

례 2. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 은 점 $x=1$에서 불련속이다.

사실 이 함수는 $x\to1$일 때 극한 2를 가지지만 $x=1$에서는 뜻을 가지지 않는다. 그라프에서 보는것처럼 이 함수의 그라프는 점 M(1, 2)에서 틈이 생겨 끊어져있다.

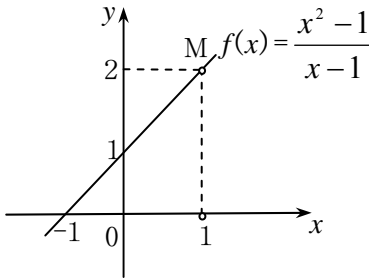
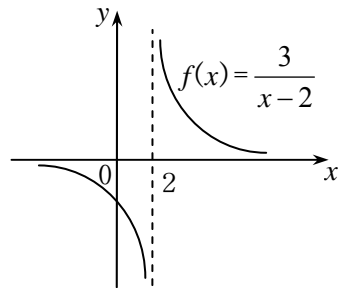



그림 3-8 그림 3-9

례 3. $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$ 은 점 x=2에서 불련속이다.

사실 이 함수는 점 $x=2$ 에서 뜻을 가지지 않을뿐아니라 $x\to2$ 일 때 극한도 가지지 않는다. 그라프에서 보는것처럼 이 함수의 그라프는 점 $x=2$ 에서 끊어져있다.

함수 $f(x)$가 주어진 구간의 매개 점에서 련속이면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 련속이라고 말한다. 특히 $f(x)$가 닫긴구간 $[a,\ b]$에서 련

속이라고 할 때 왼쪽 끝점 a 에서의 련속성은 $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ 로 정의하며 오른쪽 끝점 b 에서의 련속성은 $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$ 로 정의한다.

구간에서 련속인 함수의 그라프는 끊어지지 않고 이어져있는 곡선으로 나타난다. 우리가 늘 다루고있는 함수들인

$$y = x^n,\ \ y = \sin x,\ \ y = \cos x,\ \ y = \tan x,\ \ y = a^x,\ \ y = \log_a x$$

등은 다 그것들이 정의된 구간에서 련속이다.

이 함수들의 그라프를 보면 직관적으로 그것이 련속이라는것을 곧 알수 있다.

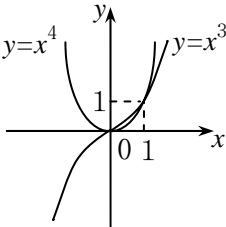



그림 3-10

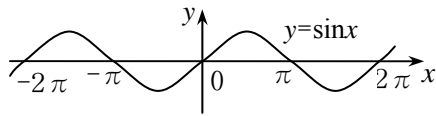



그림 3-11

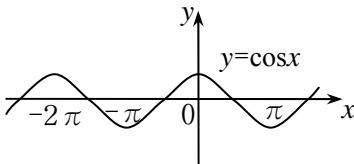



그림 3-12

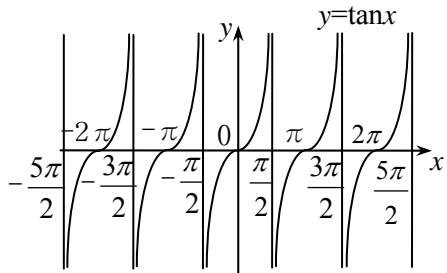



그림 3-13

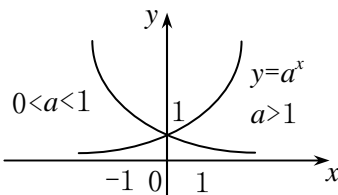



그림 3-14

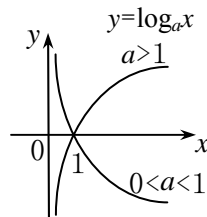



그림 3-15

문 제

다음 함수들은 어데서 련속이고 어데서 불련속인가?

1) $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$　　2) $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

3) $y=\dfrac{|x|}{x}$　　4) $y=\cos(x+2)$

련습문제

1. 다음 수렬들가운데서 수렴하는 수렬을 갈라내고 그 극한을 구하여라.

1) $1,\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{9},\ \cdots,\ \dfrac{1}{n^2},\ \cdots$

2) $1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{4},\ \cdots,\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{n},\ \cdots$

3) $\dfrac{2}{1},\ -\dfrac{2}{1},\ \dfrac{3}{2},\ -\dfrac{3}{2},\ \cdots,\ \dfrac{n+1}{n},\ -\dfrac{n+1}{n},\ \cdots$

2. 다음 수렬들가운데서 수렴하는 수렬을 갈라내고 그 극한을 구하여라.

1) $\left(\dfrac{2n}{n+1}\right)$　　2) $\left(\dfrac{1}{1+n^2}\right)$　　3) $\left(\dfrac{n^2}{n+1}\right)$　　4) $\left(\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{n}\right)$

3. 다음 극한을 구하여라.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2n+3}{-3n^2+1}$　　2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$　　4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n-1}{a-1}\ (a>0,\quad a\neq 1)$

4. 다음 함수들의 극한을 구하여라.

1) $\lim\limits_{x\to-3}3x^2(x-2)$　　2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+3x}{2x+1}$

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2+3x-4}$　　4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{3x^3-2x^2+x}{5x}$　　6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{3-x}$

5. 다음 함수들의 극한을 구하여라.

1) $\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$　　2) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$

3) $\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$　　4) $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{y+h}-\sqrt{y}}{h}$

5) $\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$　　6) $\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

6. 다음 함수들의 극한을 구하여라.

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}$　　2) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan\frac{x}{2}}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x^2}$　　4) $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta\sin\theta}$

5) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{1-2\cos x}$

7. 다음 함수는 어데서 련속이고 어데서 불련속인가?

1) $y=\frac{2x-1}{2x^2+3x+1}$　　2) $y=x+\frac{1}{x}$　　3) $y=\frac{1}{x^2-1}$

8. 다음 함수 f 에 대해서

$$f(a+h),\quad f(a+h)-f(a),\quad \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

을 각각 구하여라.

1) $f(x)=x^2$　　2) $f(x)=ax+b$

3) $f(x)=ax^2+bx+c$　　4) $f(x)=x^3$

제2절. 도함수

1. 미분결수(변화률)

함수 $y=f(x)$가 주어졌다고 하자.

x의 값이 a로부터 $a+h(h\neq 0)$까지 변할 때

x	a	$a+h$
y	$f(a)$	$f(a+h)$

x의 값의 변화는 h

y의 값의 변화는 $f(a+h)-f(a)$

이때 x와 y의 값의 변화를 각각

$$\Delta x=h,\quad \Delta y=f(a+h)-f(a)$$

와 같이 표시하고 Δx(《델타 x》)를 x의 증분, Δy(《델타 y》)를 Δx에 대응하는 y의 증분이라고 부른다.

증분은 정일수도 있고 부일수도 있다.

함수의 증분 Δy의 변수의 증분 Δx에 대한 비

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

를 x의 값이 a로부터 $a+h$까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화률이라고 부른다. 이 평균변화률은 변수 x의 증분 $\Delta x=h$에 따라 달라진다.

극한

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 있으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능하다**고 말한다.

그리고 이 극한을 점 $x=a$에서의 $f(x)$의 **미분결수** 또는 **변화률**이라고 부르고 $f'(a)$로 표시한다. 즉

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

$f'(a)$를 $y'(a)$, $\dfrac{df(a)}{dx}$, $\dfrac{dy(a)}{dx}$ 등으로도 표시한다.

례 1. 함수 $y=x^2+x$의 점 $x=2$에서의 미분결수를 구하여라.

(풀이) 점 $x=2$에서 변수의 증분을 $\Delta x=h$로 표시하면

$$\Delta y=f(2+h)-f(2)=[(2+h)^2+(2+h)]-(2^2+2)=5h+h^2$$

2와 $2+h$ 사이에서 함수의 평균변화률은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=5+h$$

$\triangle x\to 0$일 때 이것의 극한을 구하면

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}(5+h)=5$$

따라서 함수 $y=x^2+x$는 점 $x=2$에서 미분가능하고 그 변화률은

$$f'(2)=5$$

문 제

1. 함수 $f(x)=3x^2$에서 변수 x가 다음과 같이 변할 때 평균변화률을 구하여라.

1) -3에서 1까지　　2) 3에서 -2까지　　3) 2에서 $2+h$까지

또한 $f'(2)$를 구하여라.

2. 다음 함수에 대해서 $f'(-2)$, $f'(3)$, $f'(a)$를 각각 구하여라.

1) $f(x)=10-2x$　　2) $f(x)=3x-x^2$

미분결수의 그라프적의미

미분결수 $f'(a)$가 함수 $f(x)$의 그라프에서 어떤 의미를 가지는가를 보자. 그림에서 쉽게 알수 있는바와 같이

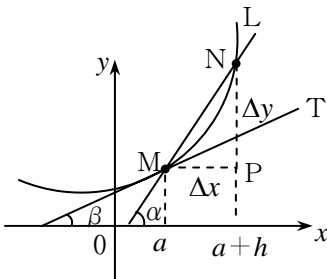
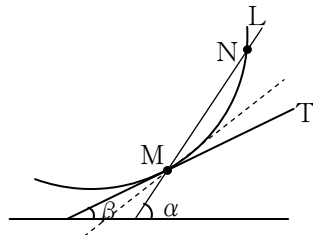



그림 3-16　　그림 3-17

$$\mathrm{MP} = \Delta x$$
$$\mathrm{NP} = \Delta y = f(a+h) - f(a)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{MP}} = \tan\alpha$$

즉 평균변화률은 가름선 MN의 방향결수를 나타낸다.

이제 $\Delta x = h \to 0$ 이면 점 N은 함수 $f(x)$ 의 그라프 L를 따라 점 M에 끝없이 가까와가고 가름선 MN은 그 방향을 점차 바꾸면서 직선 MT에 얼마든지 가까와간다. 이 직선 MT를 점 M에서 곡선 L에 그은 접선이라고 부르고 점 M을 이 접선의 접점이라고 부른다.

가름선 MN이 접선 MT로 가까와갈 때 $\alpha \to \beta$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 가 점 a 에서 미분가능하면

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\mathrm{N} \to \mathrm{M} \\ (\mathrm{N} \in \mathrm{L})}} \frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{MP}} = \lim_{\alpha \to \beta} \tan\alpha = \tan\beta$$

그런데 $\tan\beta$ 는 접선 MT의 방향결수이다. 이리하여 미분결수는 함수의 그라프에서 접선의 방향결수를 의미한다.

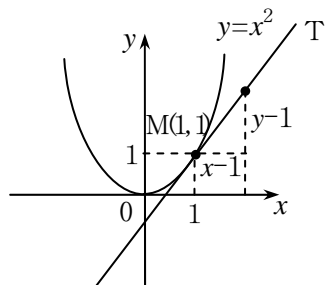
례 2. 포물선 $y = x^2$ 의 점 (1, 1)에서 그은 접선의 방정식을 구하여라.

(풀이) 점 (1, 1)에서 포물선 $y = x^2$ 에 그은 접선의 방향결수는 $x = 1$ 에서의 함수 $f(x) = x^2$ 의 미분결수이므로

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) = 2$$

그림 3-18

즉 접선의 방향결수는 2이다.

포물선 $y = x^2$ 의 점 M(1, 1)을 지나면서 방향결수가 2인 직선을 그으면 그림 3-18과 같다. 이것이 곧 $y = x^2$ 의 그라프의 점 M(1, 1)에서 그은 접선이다.

그 방정식은

$$\frac{y-1}{x-1}=2$$

이므로

$$y-1=2(x-1)$$

또는

$$2x-y-1=0$$

문 제

1. 포물선 $y=x^3$ 의 점 (2, 12)에서 그은 접선의 방향결수를 구하여라.
2. 포물선 $y=x^2-2x+1$ 의 점 (2, 1)에서 그은 접선의 방향결수를 구하고 그 방정식을 써라.
3. y 축에 평행인 접선을 그을수 있는 점에서 함수는 미분가능하지 않다. 왜 그런가?
4. 함수 $y=|x|$ 는 점 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다. 왜 그런가?
   1) 정의에 맞추어 따져보아라.
   2) 이 점에서 주어진 함수의 그라프에 접선을 하나로 그을수 있는가를 생각해보고 대답해보아라.
5. 함수 $y=f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 $x=a$ 에서 련속이다. 왜 그런가?

미분결수의 력학적의미

어떤 물체가 운동법칙

$$S=f(t)$$

에 따라 직선운동을 한다고 하자. 이것은 시간 t 의 함수로서 물체가 운동한 거리 S를 표시한다.

어떤 순간 t 에서부터 Δt 만 한 시간이 지나는 동안에 물체가 운동한 거리를 Δs 로 표시하면

$$\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t)$$

따라서 시각 t 와 $t+\Delta t$ 사이에서의 물체의 평균속도는

$$v_{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

물체가 등속직선운동을 한다면 $v_{\Delta t}$ 가 바로 물체의 속도로 될것이다. 그러나 부등속운동을 하는 경우에는 순간마다 속도가 달라진다. 그러므로 $v_{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ 는 시각 t 와 Δt 에 따라 달라진다. 그러나 Δt 를 작게 잡으면 잡을수록 $v_{\Delta t}$ 는 시각 t 에서의 물체의 속도를 보다 가깝게 표시한다고 볼수 있다. 그러므로 $\Delta t \to 0$ 일 때의 평균속도의 극한

$$\lim_{\Delta t \to 0} v_{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

를 순간 t 에서의 물체의 속도로 정할수 있다. 즉 시각 t 에서의 물체의 속도를 $v(t)$ 로 표시하면

$$v(t) = f'(t)$$

이리하여

미분결수는 력학적으로 순간속도를 의미한다.

례 3. 높은 곳에서 떨어지는 물체의 떨어진 거리 s 와 떨어지는 시간 t 사이에는 공기의 저항을 무시하면

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

라는 관계가 있다. 여기서 g 는 중력가속도이다. ($g \approx 9.8\,\mathrm{m/s^2}$) 물체가 떨어지기 시작하여 t 초 되는 시각의 물체의 속도를 구하여라.

(풀이) 시각 t 에서부터 Δt 만 한 시간이 지나는 동안에 물체가 떨어진 거리를 Δs 라고 하면

$$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$$

$$= \frac{1}{2} g (t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t^2 = g t \cdot \Delta t + \frac{1}{2} g (\Delta t)^2$$

$$v_{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g t \cdot \Delta t + \frac{1}{2} g (\Delta t)^2}{\Delta t} = g\left(t + \frac{1}{2} \Delta t\right)$$

이므로

$$\lim_{\Delta t \to 0} v_{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} g\left(t + \frac{1}{2}\Delta t\right) = gt$$

이리하여 구하려는 속도는

$$v(t) = gt$$

즉 물체가 떨어지기 시작하여 t 초 되는 순간의 물체의 속도는 gt 이다.

문 제

1. 어떤 물체가 운동법칙 $s(t)=t^2-t+1$ 에 따라 직선운동을 한다. 시간 t 가 다음과 같이 변할 때 그 평균속도를 구하여라.
   1) 2에서 3.1까지　　　2) 2에서 3.01까지
   3) 2.99에서 3까지　　　4) 3에서 $3+h$ 까지
2. 어떤 물체가 운동법칙 $s(t)=t^2-2t+1$ 에 따라 직선운동을 한다. 시각 $t=2$, $t=5$ 에서의 속도를 구하여라.

2. 도함수

함수 $f(x)$ 가 구간 $(a,\ b)$의 매개 점에서 미분가능하면 함수 $f(x)$ 는 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하다고 말한다.

함수 $f(x)$ 가 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면 $(a,\ b)$의 매개 점 x에는 그 미분결수 $f'(x)$ 가 대응한다. 이것은 $(a,\ b)$를 뜻구역으로 하고 미분결수들의 모임을 값구역으로 하는 하나의 새로운 함수가 정해졌다는것을 의미한다.

이 새로운 함수를 f' 로 표시하고 f 로부터 이끌어졌다는 의미에서 함수 f 의 **도함수**라고 부른다. 즉

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad x \in (a,\ b)$$

도함수 f' 를

$$y',\ \ f'(x),\ \ \frac{dy}{dx},\ \ \frac{df(x)}{dx}$$

등으로도 표시한다.

례 1. $y=x^3$ 의 도함수를 구하여라.

(풀이) 임의의 점 $x\in(-\infty,\ +\infty)$ 에서의 증분을 Δx 라고 하면

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3$$
$$= 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$
$$= \Delta x[3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2]$$

따라서

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}[3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2] = 3x^2$$

즉

$$y' = 3x^2,\quad x\in(-\infty,\ +\infty)$$

이때

$$f'(1) = 3\cdot 1^2 = 3,\quad f'(-3) = 3\cdot(-3)^2 = 27$$

례 2. $y=\dfrac{1}{x}$ 의 도함수를 구하여라.

(풀이) 임의의 점 $x(x\neq 0)$ 에서의 증분을 Δx 라고 하면

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)}$$

이므로

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{x(x+\Delta x)}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

즉

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

이때 $f'(-2) = -\dfrac{1}{(-2)^2} = -\dfrac{1}{4},\qquad f'(3) = -\dfrac{1}{3^2} = -\dfrac{1}{9}$

도함수를 구한 결과를 표시하기 위하여 때로는

$$(x^3)' = 3x^2,\quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

와 같이 쓰기도 한다.

문 제

1. 다음 함수의 도함수를 구하여라.

1) $y=3x-5$ 2) $y=3-x^2$

3) $s=2-5t^3$ 4) $u=\dfrac{1-v}{v}$

2. $f(x)=\sqrt{x}$ 의 다음 도함수를 구하여라.

$f'(1)=?,\quad f'(4)=?,\quad f'(25)=?$

3. 도함수계산

도함수를 구하는것을 미분한다고 말하고 도함수를 구하는 산법을 미분법이라고 부른다. 먼저 간단한 함수의 도함수를 구하고 도함수계산에서 널리 쓰이는 미분법의 규칙을 이끌어내기로 한다.

(1) 상수의 도함수

$f(x)=c$ （c 는 상수)라고 하면

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=c-c=0$

이므로

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0$$

즉

$$(c)'=0$$

(2) $y=x^n$ (n은 정의 옹근수)의 도함수

$f(x)=x^2$ 이라고 하면

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2$$
$$=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$$

이므로

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

즉

$$(x^2)' = 2x$$

$f(x) = x^3$ 이라고 하면 앞의 례 1에서 본바와 같이

$$(x^3)' = 3x^2$$

일반적으로 $f(x) = x^n$ 일 때

$$(x^n)' = nx^{n-1} \ (n \in \mathrm{N})$$

(3) 상수배의 도함수

$y = cf(x)$ (c 는 상수)라고 놓으면

$$\Delta y = cf(x + \Delta x) - cf(x) = c[f(x + \Delta x) - f(x)]$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

이므로 $f(x)$ 가 미분가능하면

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} c \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = cf'(x)$$

즉

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

례 1. 1) $y = 3x^2$ 이면

$$y' = (3x^2)' = 3(x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$$

2) $s = 2t^5$ 이면

$$s' = (2t^5)' = 2(t^5)' = 2 \cdot 5t^4 = 10t^4$$
$$s'(0) = 10 \cdot 0^4 = 0, \quad s'(2) = 10 \cdot 2^4 = 160$$

문 제

1. 다음 함수의 주어진 값에 따르는 도함수를 구하여라.
   1) $y = x^2, \quad y'(1) = ?$　　2) $y = 2x + 3x^3 \quad y'(0) = ?$
2. 다음 함수를 미분하여라.
   1) $y = x^7, \quad y'(0) = ?$　　2) $\rho = \theta^4, \quad \rho'\left(\frac{3}{2}\pi\right) = ?$
   3) $y = -2x^3$　　4) $y = -\frac{3}{4}x^4$

(4) 합과 차의 도함수

$y = f(x) + g(x)$ 라고 놓으면

$$\Delta y = [f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]$$
$$= [f(x+\Delta x) - f(x)] + [g(x+\Delta x) - g(x)]$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

이므로 $f(x), \quad g(x)$ 가 미분가능하면

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$
$$= f'(x) + g'(x)$$

즉

$$\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$$

차의 도함수공식도 꼭 마찬가지로 하여

$$\left(f(x) - g(x)\right)' = f'(x) - g'(x)$$

함수가 3개이상인 경우에도 합과 차의 도함수공식이 그대로 성립한다는것을 쉽게 알수 있다.

례를 들어

$$\big(f(x)+g(x)+h(x)\big)' = f'(x)+g'(x)+h'(x)$$
$$\big(f(x)-g(x)-h(x)\big)' = f'(x)-g'(x)-h'(x)$$

례 2. 1) $y=5x^2+6x+1$ 이면

$$y'=(5x^2+6x+1)'=(5x^2)'+(6x)'+(1)'$$
$$=5\cdot 2x+6\cdot 1+0=10x+6$$

2) $s=3\theta^3+2\theta^2-5$ 이면

$$s'=(3\theta^3+2\theta^2-5)'=(3\theta^3)'+(2\theta^2)'-(5)'$$
$$=3\cdot 3\theta^2+2\cdot 2\theta-0=9\theta^2+4\theta$$
$$s'(1)=9\cdot 1^2+4\cdot 1=13$$
$$s'(a+b)=9(a+b)^2+4(a+b)$$

례 3. $y=(2x-1)(3x-2)$ 이면

$(2x-1)(3x-2)$ 를 풀어서 미분한다.

$y=(2x-1)(3x-2)=6x^2-7x+2$

이므로

$$y'=\big((2x-1)(3x-2)\big)'=(6x^2-7x+2)'$$
$$=(6x^2)'-(7x)'+(2)'$$
$$=6\cdot 2x-7\cdot 1+0=12x-7$$

문 제

1. 다음 함수를 미분하여라.

1) $y=3x-2$ 2) $y=1-x+2x^2-5x^3$

3) $y=\dfrac{2}{3}x^3-2x+5$ 4) $s=t^3-2t^2+2$

5) $y=x^n+nx,\quad y'(1)=?,\quad y'(a)=?$

6) $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

2. 다음 함수를 미분하여라.

1) $y = x(2x-1)$ 2) $y = (x-7)(5x+1)$

3) $y = (2x+3)^2$ 4) $y = (4-x)(x+2)$

5) $y = x^2(2x+3)$ 6) $y = (1-x)(x^2+2x-1)$

(5) 적과 상의 도함수

(1) $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(2) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad (g(x) \neq 0)$

사실

(1) $y = f(x)\cdot g(x)$ 라고 놓으면

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x) \\ &= f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x+\Delta x) + \\ &\qquad + f(x)\cdot g(x+\Delta x) - f(x)\cdot g(x) \\ &= [f(x+\Delta x) - f(x)]\cdot g(x+\Delta x) + f(x)\cdot[g(x+\Delta x) - g(x)]\end{aligned}$$

이므로

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x+\Delta x) + f(x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x) + \\ &\qquad + f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x)\lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

그런데 g 는 미분가능하므로 련속이다. 따라서

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

즉 $f\cdot g$ 는 미분가능하고

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(2)도 (1)과 꼭 마찬가지로 증명할수 있다.

례 4. 1) $y=(2x+1)(3-x^2)$ 이면

$$y'=(2x+1)'(3-x^2)+(2x+1)(3-x^2)'$$
$$=2(3-x^2)+(2x+1)(-2x)=6-2x-6x^2$$

2) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ 이면

$$y'=\frac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

례 5. $y=\dfrac{1}{x^n}=x^{-n}(n\in \mathrm{N})$ 이면

$$y'=\frac{1'x^n-(x^n)'}{(x^n)^2}=\frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{-n-1}$$
$$(x^{-n})'=-nx^{-n-1}$$

이리하여 n이 옹근수인 테두리까지 제곱함수의 도함수공식을 넓힐수 있다.

$$(x^n)'=nx^{n-1}\ (n\in \mathrm{Z})$$

문 제

1. $(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x))'=f'(x)g(x)\,h(x)+f(x)g'(x)\,h(x)+f(x)g(x)\,h'(x)$
가 성립한다는것을 증명하여라.

2. 다음 함수를 미분하여라.

1) $y=(2x-5)(3x+1)$ 2) $y=(1-3x)(3x^2-x+2)$

3. 다음 함수를 미분하여라.

1) $y=\dfrac{2x}{1-7x}$ 2) $s=\dfrac{1}{t^3}$

3) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)(x-3)}$

앞에서 본 공식들을 하나로 묶어보면 다음과 같다.

(1) $(c)' = 0$ (c는 상수) (2) $(x^n)' = nx^{n-1}$ (n은 자연수) (3) $\big(cf(x)\big)' = cf'(x)$ (c는 상수) (4) $\big(f(x)+g(x)\big)' = f'(x)+g'(x)$ $\big(f(x)-g(x)\big)' = f'(x)-g'(x)$ (5) $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ (6) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ $\big(g(x)\neq 0\big)$

례 6. 포물선 $y = x^2 - 4x + 5$의 점 M(3, 2)에서 이 곡선에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

(풀이) $y' = (x^2 - 4x + 5)' = 2x - 4$

$y'(3) = 2\cdot 3 - 4 = 2$

이므로 구하려는 접선의 방향결수는 2이다. 즉

$$\frac{y-2}{x-3} = 2$$

따라서 접선의 방정식은

$$y - 2 = 2(x-3)$$

또는

$$2x - y - 4 = 0$$

문 제

1. 포물선 $y = x^2 - x$의 점 (1, 0)에서 이 곡선에 그은 접선의 방정식을 구하여라. 그리고 이 접선이 x축과 이루는 각을 구하여라.

2. 어떤 물체를 처음속도 300m/s로 땅면에 수직되게 쏘아올렸다. t초후의 물체의 높이를 hm라고 하면

$$h = 300t - 4.9t^2$$

이다. 이 물체가 가장 높은 높이에 이르기까지의 시간과 그 높이를 구하여라. 그리고 다음 순간에 물체가 올라가는가 떨어지는가를 말하여라.

1) t =20초　　2) t =30초　　3) t =32초

련습문제

1. 함수 $y=\frac{1}{3}x^3$ 에 대하여 다음것을 구하여라.

1) $x=1$ 과 $x=2$ 사이에서의 평균변화률

2) $x=2$ 와 $x=3$ 에서의 평균변화률

3) $x=3$ 에서의 변화률

2. 다음 함수들을 미분하여라.

1) $y=0.5-3x$ 2) $y=5x-4x^2$

3) $s=10-t^3+2t^4$ 4) $\varphi(x)=mx^n+nx^m$

5) $y=2x^{10}-2x^5+x$ 6) $y=\frac{3}{4}(2x+1)^2$

3. 다음 함수들을 미분하여라.

1) $y=x^2(1-x)$ 2) $y=(5z^2-1)(3+2z)$

3) $y=(1-4s^2)(2s^2+1)$ 4) $y=(x^n+a^n)(x^m+a^m)$

4. 포물선 $y=-x^2+2x$ 에 그은 접선이 x 축의 정방향과 $0°$ 의 각을 이루는 접점은 어떤 점인가? 또한 $45°$ 의 각을 이루는 접점은 어떤 점인가?

5. 점 $x=0.5$, $x=1$ 에서 포물선 $y=x^2-2x+5$ 에 그은 접선의 방정식을 각각 구하여라.

제3절. 도함수의 응용

1. 함수값의 증가와 감소

함수값의 증가와 감소는 도함수의 부호와 밀접한 관계를 가지고있다.

함수 $f(x)=-x^2+4x$ 를 놓고 그것을 알아보자.

$$f'(x)=-2x+4=-2(x-2)$$

이므로 함수 $f(x)$ 의 그라프의 $x=a$ 에서의 접선의 방향결수는

$$f'(a)=-2(a-2)$$

$a<2$ 일 때 $f'(a)>0$

이므로 x 자리표가 2보다 작을 때 접선의 방향결수가 정이므로 그라프는 왼쪽에서 오른쪽으로 오른다. 따라서 x 의 값이 커짐에 따라 $f(x)$ 의 값은 커진다.

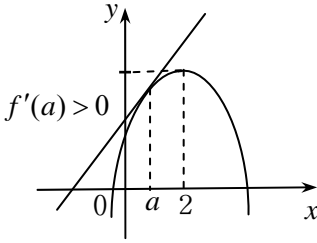



그림 3-19

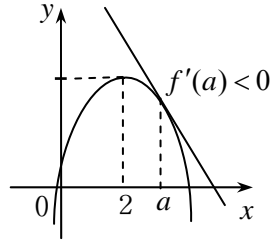



그림 3-20

$a>2$ 일 때 $f'(a)<0$ 이므로 x 자리표가 2보다 클 때는 접선의 방향결수가 부이므로 그라프는 왼쪽에서 오른쪽으로 내린다. 따라서 x의 값이 커짐에 따라 $f(x)$의 값은 작아진다.

이와 같이 $f'(x)$의 부호에 따라 함수 $f(x)$의 값의 증가와 감소를 판정할수 있다.

어떤 구간에서 1) $f'(x)>0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다. 2) $f'(x)<0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다.

어떤 구간의 어데서나 $f'(x)=0$ 이면 이 구간의 매개 점에서 함수 $f(x)$의 그라프에 그은 접선은 x축에 평행이다. 그러므로 그라프자체도 x축에 평행인 직선이다.

따라서 함수 $f(x)$는 이 구간에서 상수이다.

함수 $f(x)$ 가 어떤 구간의 어데서나 $f'(x)=0$ 이면 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 상수이다.

례 1. 함수 $y=x^3-3x$ 는 어데서 증가하고 어데서 감소하는가?

(풀이) $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ 이므로

$x<-1$ 에서 $f'(x)>0$

$-1<x<1$ 에서 $f'(x)<0$

$x>1$ 에서 $f'(x)>0$

따라서 $y=x^3-3x$ 는 $(-\infty,\ -1)$ 과 $(1,\ +\infty)$ 에서 증가하고 $(-1,\ 1)$에서 감소한다.

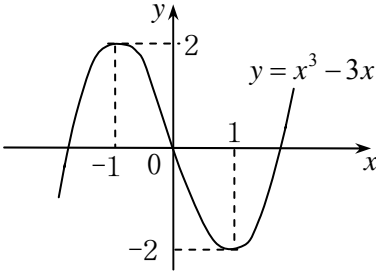
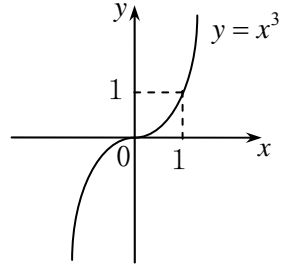



그림 3-21　　　　　　　　　　그림 3-22

례 2. 함수 $y=x^3$ 은 어데서 증가하고 어데서 감소하는가?

(풀이) $f'(x)=3x^2$

이므로 $x>0$ 에서나 $x<0$ 에서 $f'(x)>0$

$x=0$ 에서 $f'(x)=0$

따라서 $y=x^3$ 은 점 $x=0$ 까지 포함하여 $(-\infty,\ +\infty)$ 에서 증가한다.

문 제

1. 다음 함수는 어데서 증가하고 어데서 감소하는가?

1） $y=x^2-3x$　　　　2） $y=-2x^2+8x+1$

3） $y=x^2-12x+1$　　　　4） $y=x^3-12x+1$

2. 2차함수 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 은 어데서 증가하고 어데서 감소하는가? 그라프를 그려서 그 모양을 살펴보아라.

2. 함수의 극대와 극소

앞에서 본 함수 $y=x^3-3x$ 에서

$x=-1$ 은 y 의 값이 증가하다가 감소로 넘어가는 경계점

$x=1$ 은 y 의 값이 감소하다가 증가로 넘어가는 경계점

으로 되여있다.

함수 $f(x)$ 의 값이 $x=a$ 를 경계로 하여 증가하다가 감소하면 $f(x)$ 는 점 $x=a$ 에서 극대로 된다고 말하고 $f(a)$ 를 극대값, $x=a$ 를 극대점이라고 부른다.

또한 $x=b$ 를 경계로 하여 감소하다가 증가하면 $f(x)$ 는 점 $x=b$ 에서 극소로 된다고 말하고 $f(b)$ 를 극소값, $x=b$ 를 극소점이라고 부른다.

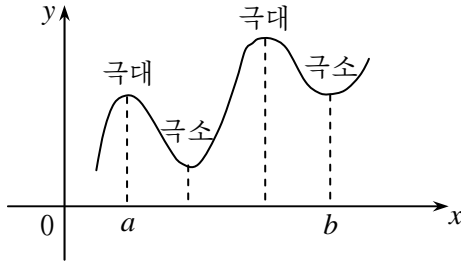



그림 3-23

극대값과 극소값, 극대점과 극소점을 각각 통털어서 극값, 극값점이라고 부른다.

함수 $f(x)=x^3-3x$ 에서

$x=-1$ 은 극대점이고 $f(-1)=2$ 는 극대값이다.

$x=1$ 은 극소점이고 $f(1)=-2$ 는 극소값이다.

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값을 가지면 함수값이 증가로부터 감소로 또는 감소로부터 증가로 바꾸어지므로 도함수 $f'(x)$ 는 정으로부터 부로 또는 부로부터 정으로 부호가 바뀐다.

따라서 점 $x=a$ 에서 $f'(a)=0$ 이여야 한다.

이로부터 다음과 같은 극값판정조건을 얻는다.

극대극소판정조건

$f'(x)=0$ 에 맞는 점 $x=a$ 를 구하고 그 왼쪽과 오른쪽에서 $f'(x)$ 의 부호를 살핀다. 이때 그 부호가

1) 정으로부터 부로 변하면 $x=a$ 는 극대점이고

2) 부로부터 정으로 변하면 $x=a$ 는 극소점이다.

$f'(x)=0$ 에 맞는 점을 함수 $f(x)$ 의 머물점이라고 부른다.

함수 $f(x)$ 의 극값점을 구하자면 먼저 방정식 $f'(x)=0$ 을 풀어 머물점을 찾고 머물점의 왼쪽과 오른쪽가까이에서 $f'(x)$ 의 부호를 보고 극대, 극소를 판정한다.

머물점	$\cdots a \cdots$	판 정
$f'(x)$	$+ \quad 0 \quad -$	극대점
	$- \quad 0 \quad +$	극소점
	$\pm \quad 0 \quad \pm$	극값점이 아니다.

례 1. 함수 $y=2x^3-3x^2-12x+6$ 의 극값을 구하고 대략적인 그라프를 그려라.

(풀이) 이 함수의 뜻구역은 $(-\infty,\ +\infty)$ 이다.

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에 맞는 점을 구하면 $x_1=-1,\quad x_2=2$

$f'(x)$ 의 부호를 살펴 $f(x)$ 의 값의 증가, 감소를 표로 표시하면 다음과 같다.

x	$x<-1$	-1	$-1<x<2$	2	$2<x$
$f'(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	↗	13	↘	-14	↗

이리하여 이 함수는 $x=-1$ 에서 극대값 $f(-1)=13$, $x=2$ 에서 극소값 $f(2)=-14$ 를 가진다.

표를 보고 y 축파의 사귐점이 (0, 6)이라는것을 고려하여 이 함수의 대략적인 그라프를 그리면 그림 3-24와 같다.

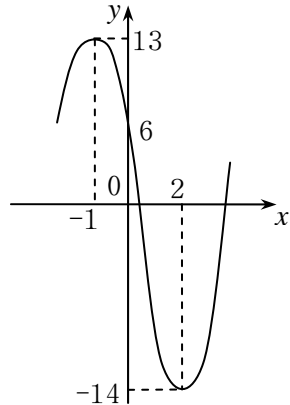



그림 3-24

문 제

1. 다음 함수들은 극값을 가지는가?

1) $y=2x+3$ 2) $y=-x^3-x$

2. 다음 함수들의 극값을 구하고 대략적인 그라프를 그려라.

1) $y=x^3-6x$ 2) $y=x^3-3x^2+2$

3. 함수 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\ge 1 \\ -x+1, & x<1 \end{cases}$ 은 전구간 $(-\infty,\ +\infty)$ 에서 미분가능한가를 따져보고 극값을 구하여라.

주어진 구간전체에 걸쳐서 함수의 최대값(최소값)을 구하자면 먼저 그 구간아낙에서 극대값(극소값)을 다 구하고 여기에 구간의 끝점이 있다면 끝점에서의 함수값을 덧붙여 이가운데서 가장 큰(작은) 값을 잡으면 된다.

례 2. 함수 $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+3$ 의 구간 $[-1,\ 2]$에서의 최대값과 최소값을 구하여라.

(풀이) 먼저 (-1, 2)에서 극값을 구하자.

$$f'(x)=x^2-4x=x(x-4)$$

이므로 머물점은 $x_1=0,\ x_2=4$

그런데 $x_2=4$ 는 (-1, 2)의 점이 아니므로 버린다.

$-1<x<0$ 에서 $f'(x)>0$

$0<x<2$ 에서 $f'(x)<0$

이므로 $x=0$ 은 $f(x)$ 의 극대점이고 극대값은 $f(0)=3$ 이다. (-1, 2)에서 $f(x)$ 의 극소점은 없다.

두 끝점 -1과 2에서의 함수값을 구하면

$$f(-1)=\frac{(-1)^3}{3}-2\cdot(-1)^2+3=\frac{2}{3}$$

$$f(2)=\frac{2^3}{3}-2\cdot2^2+3=-2\frac{1}{3}$$

이리하여 구간 [-1, 2]에서 주어진 함수 $f(x)$ 의 최대값은 $f(0)=3$ 이고 최소값은 $f(2)=-2\frac{1}{3}$ 이다.

례 3. 두 변의 길이가 각각 45cm, 24cm인 직4각형모양의 철판이 있다. 네 귀에서 같은 크기의 바른4각형을 잘라내여 뚜껑이 없는 함을 만들려고 한다. 네 귀에서 얼마만한 크기의 바른4각형을 잘라내면 그 체적이 가장 크게 되겠는가?(그림 3-25)

(풀이) 네 귀에서 잘라내는 바른4각형의 한 변의 길이를 x cm 라고 하면 함의 체적 V는 다음과 같이 표시된다.

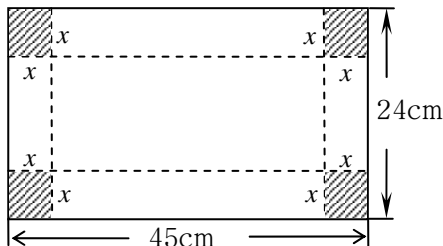



그림 3-25

$$V = f(x) = (45-2x)(24-2x)x \quad (0 < x < 12)$$

이리하여 문제는 구간 (0, 12)에서 이 함수의 최대값을 구하는 문제로 된다.

$$f'(x) = -2(24-2x)x + (45-2x)(-2)x + (45-2x)(24-2x)$$
$$= 12(x^2 - 23x + 90) = 12(x-5)(x-18)$$

머물점은 $x_1 = 5$, $x_2 = 18$ 이다. 그런데 18은 (0, 12)밖의 점이므로 버린다.

$x_1 = 5$ 의 왼쪽과 오른쪽가까이에서 도함수 $f'(x)$ 의 부호를 보면

$$x < 5 \text{에서 } f'(x) > 0, \quad x > 5 \text{에서 } f'(x) < 0$$

이므로 $x_1 = 5$ 는 구간 (0, 12)에서 함수 $f(x)$ 의 유일한 극대점이며 극대값은 $f(5) = 2450$ 이다.

이리하여 한 변의 길이가 5cm인 바른4각형을 네 귀에서 잘라내여 함을 만들면 된다. 이때 함의 체적은

$$V = 2450\text{cm}^3$$

문 제

1. 다음 함수의 최대값과 최소값을 구하여라.

1) $f(x) = 1 - 2x - x^2$, $[-2, \ 0]$

2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$, $[-2, \ 2]$

2. 직경이 d 인 원목에서 가장 큰 자름면을 가지는 직4각형보를 잘라내려고 한다. 자름면의 치수를 어떻게 잡으면 되겠는가?

련습문제

1. 다음 함수들은 어데서 증가하고 어데서 감소하는가?

1) $y = 2x^2 - 6x + 1$ 2) $y = -3x^2 - 8x$

3) $y = x(x+3)(x-5)$ 4) $y = x^2(x-3)^2$

2. 다음 함수는 수축전체에서 증가하거나 감소하는 함수라는것을 밝혀라.

1) $y = 1 - 6x + 4x^2 - 2x^3$ 2) $y = x^3 - (1-x)^2$

3. 다음 함수의 극값을 구하고 대략적인 그라프를 그려라.

1) $y = x^2 - 10x + 10$ 2) $y = (2-x)(4x+7)$

3) $y = 10 + 6x - x^3$

4. 다음 함수의 극값을 구하고 대략적인 그라프를 그려라.

1) $y=2x^3+3x^2+6x-2$ 2) $y=x^3(1-x)^4$ 3) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

5. 함수 $y=\dfrac{ax^2+2x+b}{x^2+1}$ 가 $x=1$ 에서 극대값 5를 가진다. 이때 a, b 의 값과 함수의 극소값을 구하여라.

6. 함수 $f(x)=2x+\dfrac{a}{2x-3}$ 의 극대값이 0이 되도록 a 의 값을 구하여라.

7. 다음 함수의 최대값과 최소값을 구하여라.

1) $y=2x^3-9x^2+12x-3,\quad 0\le x\le 1$

2) $y=1+36x+36x^2-2x^3,\quad -10\le x\le 4$

8. 반경이 R인 반원에 내접하는 직4각형가운데서 면적이 가장 크게 되는것을 구하여라.

복습문제

1. 다음 수렬의 극한을 구하여라.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+5n-6}{n^2+n-1}$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{(n+1)(n+2)}$

2. 다음 수렬의 극한을 구하여라.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+1}{2^{n+1}+1}$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n)!n}{(3n+1)!}$

3. 다음 극한을 구하여라.

1) $\lim\limits_{x\to1}(3x^2-2x+5)$ 2) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{x^2-0.25}{x-0.5}$

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-(x+1)}{x}$

4. 다음 극한을 구하여라.

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin\frac{x}{4}}$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin4x}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan nx}{mx}$ 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x}$

5. 다음 함수를 미분하여라.

1) $y=2x^3-3x$ 2) $y=x(x+1)$ 3) $S=\frac{3}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2+2t$

6. 다음 함수를 미분하여라.

1) $f(s)=(1-4s^2)(2s^3+1)$ 2) $S=(2t^2+1)(4t^3-5)$

7. 곡선 $y=x^3-4x$ 의 점 M(1, -3)에서 그은 접선의 방정식을 구하여라.

8. 곡선 $y=x^3-6x^2+4$ 에 대해서 다음것을 구하여라.

1) $x=a$ 에서 접선의 방향결수

2) 접선의 방향결수가 0인 x 의 값

9. 다음 함수는 어데서 증가하고 어데서 감소하는가?

1) $y=3x^4-4x^3+2$ 2) $y=\frac{1}{4}x(x-3)^2$

10. 다음 함수의 극값을 구하고 대략적인 그라프를 그려라.

1) $y=x^3-6x^2+9x-1$ 2) $y=\frac{x^2}{x+1}$

오일레르의 과학연구활동

과학의 력사가 기록하고있는 큰 발견이나 발명들은 그 어느것이든지 결코 쉽게 이루어진것이란 없다. 그 갈피마다에 기록되여있는 하나하나의 공식이나 리론들에는 사람들의 고심어린 탐구와 노력이 깃들어있다. 이것은 한생을 고스란히 과학연구사업에 바친 오일레르(1707년-1783년)의 경우를 놓고보아도 그렇게 말할수 있다.

오일레르는 자기 생애의 전기간 886건의 론문을 썼는데 그가운데서 400여건은 그가 맹인이 되여 사망하기 전까지 쓴것이라고 한다. 오일레르의 론문들은 수학, 력학, 천문학, 기술공학, 철학 등 넓은 범위를 포괄하고있으며 그 가치에 있어서도 매우 의의있고 독창적인것이다.

제4장. 적분과 그 응용

제1절. 적분

1. 적분의 의미

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 련속이고 $f'(x)\geq 0$이라고 하자.

이 함수의 그라프는 x축의 웃부분에 놓인다.

이제 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=a,\ \ x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 면적을 구하는 문제를 생각해보자.

이러한 도형을 곡선제형이라고 부른다.

구간 $[a,\ b]$를 다음과 같은 점들로 n개의 부분으로 같게 나누자.

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

이때 $x_i-x_{i-1}=\dfrac{b-a}{n}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

매개 나눔점 $x_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$에서 y축에 평행인 직선을 그어 곡선제형을 n개의 작은 곡선제형으로 나누자.

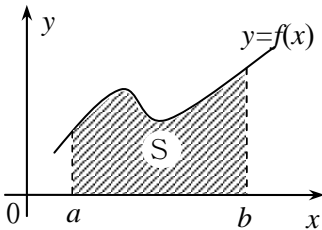



그림 4-1

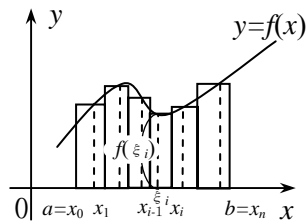



그림 4-2

이제 나눔구간 $[x_{i-1},\ x_i]$에서 한 점 ξ_i를 임의로 잡고 이 구간우에서는 작은 곡선제형을 $[x_{i-1},\ x_i]$를 밑변으로 하고 $f(\xi_i)$를 높이로 하는 직4각형으로 바꾸면 그 면적은

$$f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=f(\xi_i)\frac{b-a}{n}$$

매개 나눔구간에 걸쳐서 이렇게 하면 주어진 곡선도형은 그림에서와 같이 n개의 작은 직4각형들로 된 계단형도형으로 바뀌여지고 그 면적은 다음 합과 같다.

$$S_n = f(\xi_1)\frac{b-a}{n} + f(\xi_2)\frac{b-a}{n} + \cdots + f(\xi_n)\frac{b-a}{n}$$

합기호 $\sum$를 쓰면

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\frac{b-a}{n}$$

이 합은 구간 $[a,\ b]$의 나눔점의 개수 n과 점 $\xi_i(i=1,\ 2,\cdots,\ n)$를 어떻게 잡는가에 따라 달라진다. 그러나 나눔점의 개수 n을 끝없이 늘이면 구간 $[a,\ b]$는 무한히 잘게 나누어지고 이때 계단형도형은 곡선제형에 얼마든지 가까와간다. 그러므로 곡선제형의 면적 S는 계단형도형의 면적 S_n의 $n\to\infty$일 때의 극한으로 정할 수 있다. 즉

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\frac{b-a}{n}$$

이와 같이 끝없이 잘게 나눈 다음 그것을 다시 합하는 수법에 따르는 우와 같은 합의 극한계산은 곡선제형의 면적계산에서뿐만아니라 일, 압력 등 실천적으로 나서는 많은 량들의 계산에서도 하게 된다.

일반적으로 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 주어졌다고 하자. 이때 $f(x)$는 부수값을 잡아도 좋다.

구간 $[a,\ b]$를 우에서와 같이 n개의 구간으로 같게 나누고 매개 나눔구간 $[x_{i-1},\ x_i]$에서 한 점 ξ_i를 임의로 잡아 합

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x \quad \left(\Delta x = \frac{b-a}{n}\right)$$

을 만들자. 이 합을 적분합이라고 부른다.

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 련속이면 점 ξ_i를 어떻게 잡는가에 관계없이 극한

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$

이 있다. 이 극한을 a에서 b까지의 $f(x)$의 **적분**이라고 부르고 다음과 같이 표시한다.

$$\int_a^b f(x)dx$$

즉 $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$

이때 a를 적분의 아래끝, b를 적분의 웃끝, $f(x)$를 피적분함수, x를 적분변수라고 부른다.

적분기호를 쓰면 앞에서 본 곡선제형의 면적 S는 다음과 같이 표시된다.

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

우에서 적분의 웃끝 b가 아래끝 a보다 큰 경우 즉 $a<b$인 경우에 적분을 정의하였다.

적분의 웃끝 b가 아래끝 a보다 작거나 같은 경우에는 다음과 같이 정의한다.

$a=b$이면 $\int_a^b f(x)dx = 0$

$a>b$이면 $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

앞으로 따로 말이 없으면 련속함수에 대한 적분만을 생각하기로 한다.

적분의 정의와 극한의 성질을 써서 다음과 같은 적분의 성질을 쉽게 증명할수 있다.

적분의 성질

(1) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (k 는 상수)

(2) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

사실

(1) $\int_a^b kf(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x$

$$= k\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x = k\int_a^b f(x)dx$$

(2) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)+g(\xi_i)]\Delta x$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

성질 (2)의 두번째도 꼭 마찬가지로 증명된다.

2. 적분계산

적분 $\int_a^b f(x)dx$ 의 값을 구하는것을 $f(x)$ 를 a 에서 b 까지 적분한다고 말한다. 적분값은 아래끝 a 와 웃끝 b 에만 관계되고 적분변수 x에는 무관계하다. 그러므로 x를 다른 글자로 바꾸어도 된다.

례를 들어

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

례 1. $\int_0^1 xdx$ 를 계산하여라.

(풀이) 구간 [0, 1] 을 다음과 같은 점들로 n 개의 부분으로 갈게 나누자.

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1$$

이때 $\Delta x = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n} \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

매개 나눔구간 $\left[\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right]$ 에서 점 ξ_i 를 그 오른쪽 끝점으로 잡으면 $\xi_i = \frac{i}{n} \ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, $f(x) = x$ 이므로

$$f(\xi_i) = \xi_i = \frac{i}{n}$$

따라서 적분합은

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n} + \frac{n}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = (1 + 2 + \cdots + n) \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

즉 $\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$

이것은 그림 4-3에서 빗선을 친 3각형의 면적이다. 3각형의 면적계산공식을 직접 써도 $\frac{1}{2}$ 이 나온다.

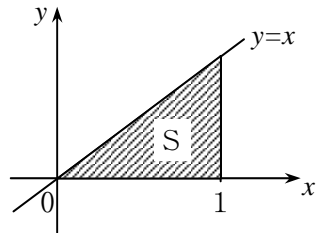



그림 4-3

적분계산을 우의 례에서와 같이 적분의 정의에 따라 적분합을 만들고 그 극한을 구하는 식으로 하는것은 간단하지 않다.

간단히 계산하는 방법을 생각해보자.

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 련속이고 $f(x)\geq 0$이라고 할 때 적분 $\int_a^b f(x)dx$는 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=a,\ x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 곡선제형의 면적을 표시하였다.

$[a,\ b]$아낙의 한 점 x를 잡고 $\int_a^x f(x)dx$를 생각하면 이것은 $[a,\ x]$에서의 곡선제형의 면적을 표시한다. x를 변화시키면 그에 따라 $\int_a^x f(x)dx$의 값이 달라진다. 즉 $\int_a^x f(x)dx$는 x의 함수이다. 이것을 $\mathrm{S}(x)$로 표시하면

$$\mathrm{S}(x)=\int_a^x f(x)dx \quad (a\leq x\leq b)$$

분명히 $\mathrm{S}(a)=0,\ \ \mathrm{S}(b)=\int_a^b f(x)dx$

y
y=f(x)
S(x)
0 a x b x

그림 4-4

y
y=f(x)
S(x)
ΔS
0 a x x+Δx b x

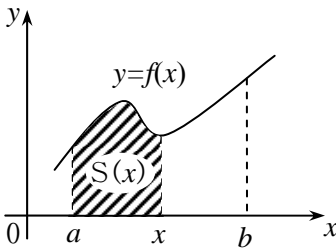
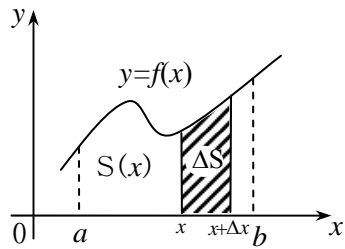



그림 4-5

$[a,\ b]$에 드는 임의의 점 x에서 증분 Δx를 잡으면

$$\Delta \mathrm{S}=f(x+\Delta x)-f(x)$$

는 그림에서 빗선을 친 작은 곡선제형의 면적과 같다.

그림에서 쉽게 알수 있는바와 같이

$$f(x)\Delta x\leq \Delta \mathrm{S}\leq f(x+\Delta x)\Delta x$$

이므로

$$f(x)\leq \frac{\Delta \mathrm{S}}{\Delta x}\leq f(x+\Delta x)$$

$\Delta x \to 0$인 극한을 잡으면 $f(x)$가 련속함수이므로

$$f(x) \le \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} \le f(x)$$

따라서

$$S'(x) = f(x)$$

즉 $S(x)$는 미분하면 $f(x)$가 되는 하나의 함수이다.

일반적으로 도함수가 $f(x)$일 때 즉 $F'(x) = f(x)$일 때 $F(x)$를 $f(x)$의 원시함수라고 부른다.

례 2. 1) $(x^2)' = 2x$, $(x^2+3)' = 2x$이므로

$F(x) = x^2$, $F(x) = x^2 + 3$

들은 $f(x) = 2x$의 원시함수이다.

2) $F(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$, $F(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + c\right) = x^2$ (c는 상수)이

므로 $F(x)$들은 $f(x) = x^2$의 원시함수이다.

이와 같이 어떤 함수의 원시함수는 하나가 아니다.

$F(x)$와 $G(x)$가 $f(x)$의 임의의 두 원시함수라고 하면

$$[F(x) - G(x)]' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

도함수가 0인 함수는 상수뿐이므로

$$F(x) - G(x) = c \quad (c\text{는 상수})$$

즉 같은 함수 $f(x)$의 원시함수들은 상수차이만을 가진다.

$f(x)$의 하나의 원시함수를 $F(x)$라고 하자.

앞에서 본바와 같이 $S(x)$는 $f(x)$의 원시함수이므로

$$S(x) = F(x) + c \quad (c\text{는 상수})$$

그런데 $S(a) = 0$이므로 $c = -F(a)$

따라서

$$S(x) = F(x) - F(a)$$

이고

$$S(b) = F(b) - F(a)$$

즉

$$\int_a^b f(x)dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

또는 간단히

$$\int_a^b f(x)dx = \mathrm{F}(x)\Big|_a^b$$

이 공식은 구간 $[a,\ b]$에서 련속인 모든 함수에 대해서 다 성립한다. 이 공식을 미분적분학의 기본공식 또는 뉴톤-라이브니쯔의 공식이라고 부른다.

이 공식은 적분을 계산하기 위해서는 피적분함수의 원시함수만 알면 된다는것을 보여준다.

도함수공식

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad \text{또는} \quad \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$$

로부터 다음과 같은 적분계산공식을 하나 얻는다.

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b$$

이 공식과 적분의 성질 (1), (2)를 쓰면 적분계산을 쉽게 할수 있다.

례 3. 1) $\displaystyle\int_1^3 x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1}\Big|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{80}{4} = 20$

2) $\displaystyle\int_0^3 (-2x^2)dx = -2\int_0^3 x^2 dx = -2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = -2\left(\frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = -18$

3) $\displaystyle\int_{-2}^1 (2t^3 + t)dt = 2\int_{-2}^1 t^3 dt + \int_{-2}^1 tdt$

$$= 2\cdot\frac{t^4}{4}\Big|_{-2}^1 + \frac{t^2}{2}\Big|_{-2}^1 = 2\left(\frac{1^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4}\right) + \left(\frac{1^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right) = -9$$

적분에는 또한 다음과 같은 중요한 성질이 있다.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

이 성질은 c가 구간 $[a,\ b]$밖에 놓일 때도 성립한다.

례 4. $\int_{-1}^{1} |x| dx$ 를 계산하여라.

(풀이) $|x| = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ -x, & -1 \le x < 0 \end{cases}$

이므로

$$\int_{-1}^{1} |x| dx = \int_{-1}^{0} -x dx + \int_0^1 x dx = -\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{0} + \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{(-1)^2}{2} + \frac{1^2}{2} = 1$$

문 제

다음 적분을 계산하여라.

1) $\int_1^5 (6x+1)dx$ 2) $\int_0^2 (3-2x^2)dx$ 3) $\int_{-3}^{3} (x-3)(x+3)dx$

4) $\int_0^{\alpha} (3-2\theta+\theta^3)d\theta$ 5) $\int_1^4 (t-1)(4-t)dt$

3. 부정적분

$f(x)$ 가 $[a,\ b]$ 에서 련속일 때 적분 $\int_a^b f(x)dx$ 는 $f(x)$ 의 원시함수 $\mathrm{F}(x)$ 를 알면

$$\int_a^b f(x)dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) \qquad (\mathrm{F}'(x) = f(x))$$

으로 계산된다.

이제 적분의 웃끝 b를 변수 x로 표시하면

$$\int_a^x f(x)dx = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a)$$

따라서 $\int_a^x f(x)dx$ 는 적분의 웃끝 x의 함수이다.

이때 $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx = \dfrac{d}{dx}\left[\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a)\right] = \mathrm{F}'(x) = f(x)$ 이므로 $\int_a^x f(x)dx$ 는 $f(x)$ 의 하나의 원시함수이다.

따라서

$$\int_a^x f(x)dx = \mathrm{F}(x) - c \qquad (c\text{는 상수})$$

상수 c를 적분상수라고 부른다.

이때 왼변의 적분에서 웃끝과 아래끝을 생략하고 간단히

$$\int f(x)dx$$

와 같이 쓰고 $f(x)$ 의 부정적분이라고 부른다. 즉

$$\mathrm{F}'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = \mathrm{F}(x) + c$$

이것은 련속함수의 부정적분은 그 원시함수와 같다는것을 보여준다. 따라서 부정적분을 구하기 위해서는 미분법의 거꿀을 생각하면 된다.

례 1. 1) $\int 2xdx = x^2 + c \qquad \left((x^2)' = 2x\right)$

2) $\int x^2 dx = \dfrac{1}{3}x^3 + c \qquad \left(\left(\dfrac{1}{3}x^3\right)' = x^2\right)$

문 제

1. 다음 부정적분을 구하여라.

1) $\int 3x^2 dx$　　　　2) $\int \frac{1}{x^2} dx$

2. 다음 사실이 성립한다는것을 밝혀라.

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$　　　　2) $\int f'(x)dx = f(x) + c$

함수의 부정적분을 구하는것을 그 함수를 적분한다고 말하며 부정적분을 구하는 산법을 적분법이라고 부른다. 적분법은 미분하여 $f(x)$가 되는 함수 $\mathrm{F}(x)$를 구하는것이므로 미분법의 거꿀산법이다. 이리하여 도함수공식으로부터 $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$ 와 같은 적분공식을 얻을수 있다.

미분법의 규칙으로부터 다음과 같은 적분계산규칙을 얻을수 있다.

(1) $\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$ (k는 상수)

(2) $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

$\int [f(x) - g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx$

공식 (2)는 3개이상의 함수의 합과 차에 대해서도 그대로 성립한다.

례 2. 1) $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{x^5}{5} + c$

2) $\int 4x^3 dx = 4\int x^3 dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4} + c = x^4 + c$

3) $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{1}{2x^2} + c$

문 제

다음 부정적분을 구하여라.

1) $\int (3x-1)dx$ 2) $\int \left(2x^2+\frac{1}{x^3}\right)dx$ 3) $\int \frac{x^2-x+1}{x^3}dx$

련습문제

1. 다음 함수의 원시함수를 구하여라.

1) $5x^3$ 2) $4x-3$ 3) 0

4) x^3+x^2+x-1 5) $x(x-1)$ 6) $(x-2)^3$

2. 다음 적분을 계산하여라.

1) $\int_0^1 (3-4x)dx$ 2) $\int_{-1}^3 x^2(x-1)dx$ 3) $\int_0^{\frac{1}{2}} (2t-1)^2 dt$

4) $\int_{-1}^1 (2x^3-x^2+1)dx$ 5) $\int_{-2}^1 2|x|dx$ 6) $\int_{-1}^2 |x-1|dx$

3. $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 1 \\ 2-x, & 1<x<2 \end{cases}$ 일 때 적분 $\int_0^2 f(x)dx$ 를 계산하여라.

4. 다음 같기식에 맞는 함수 $f(x)$ 를 구하여라.

1) $f'(x)=2x^3$ 2) $f'(x)=(1-3x)^2$ 3) $\int f(x)dx = x^3-5x^2+c$

5. 다음 부정적분을 구하여라.

1) $\int 5x^3dx$ 2) $\int (-x^5)dx$ 3) $\int x(x-1)^2dx$

4) $\int (2-\mathrm{Q})(\mathrm{Q}+1)d\mathrm{Q}$ 5) $\int (ax^2+bx+c)dx$ 6) $\int \frac{dr}{r^2}$

6. 함수 $f(x)=x-x^2$ 의 원시함수가운데서 다음 조건에 맞는것을 구하여라.

1) $x=0$ 일 때 그 값이 0이다.

2) $x=1$ 일 때 그 값이 -1이다.

7. 다음 조건에 맞는 함수 $f(x)$ 를 구하여라.

1) $f'(x)=1-x, \quad f(0)=1$

2) $f'(x)=(2x-1)(2-x), \quad f(1)=3$

제2절. 적분의 응용

곡선 $y=f(x)(f(x)\geq 0)$ 와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 곡선제형의 면적 S는 다음과 같이 표시되였다.

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

례 1. 포물선 $y=-x^2+4x+5$ 와 x축으로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.

(풀이) 포물선 $y=-x^2+4x+5=-(x-5)(x+1)=0$ 이므로

(−1, 0), (5, 0)

따라서 구하려는 도형의 면적은

$$S=\int_{-1}^{5}(-x^2+4x+5)dx$$

$$=-\int_{-1}^{5}x^2dx+4\int_{-1}^{5}xdx+5\int_{-1}^{5}dx$$

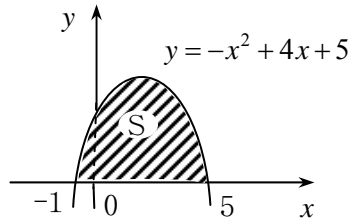
$$=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2+5x\right)\Bigg|_{-1}^{5}$$

$$=\left(-\frac{125}{3}+50+25\right)-\left(\frac{1}{3}+2-5\right)=36$$

그림 4-6

$f(x)\leq 0$ ($a\leq x\leq b$)일 때 곡선 $y=f(x)$ 와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 도형은 그림 4-7에서 보는바와 같이 x축아래에 놓인다.

이 도형을 x축에 관하여 대칭으로 옮기면 면적이 꼭같은 곡선제형을 얻는다.

따라서 구하려는 도형의 면적 S는 다음과 같다.

$$S=-\int_a^b f(x)dx=\int_a^b |f(x)|dx$$

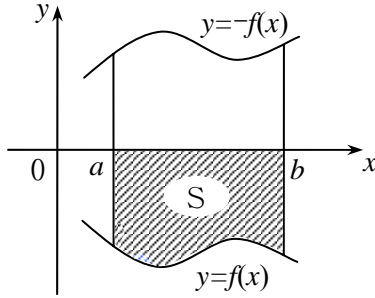



그림 4-7

례 2. 포물선 $y=x^2-2$와 x축으로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.

(풀이) 먼저 곡선 $y=x^2-2$가 x축과 사귀는 점의 x자리표를 구하기 위하여 련립방정식

$$\begin{cases} y=x^2-2 \\ y=0 \end{cases}$$

을 풀면

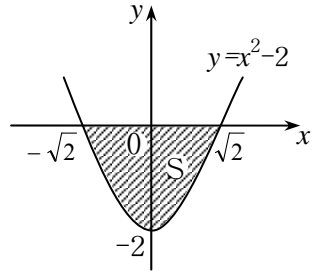
$$x_1=-\sqrt{2}\,,\quad x_2=\sqrt{2}$$

를 얻는다.

그림 4-8

그런데 $[-\sqrt{2}\,,\ \sqrt{2}\,]$에서 늘 $y\le 0$이므로 구하려는 도형의 면적 S는

$$\mathrm{S}=-\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(x^2-2)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+2x\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$=\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}+2\sqrt{2}\right)-\left(-\frac{-2\sqrt{2}}{3}-2\sqrt{2}\right)=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

문 제

1. 포물선 $y=-x^2+5x+4$와 x축으로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.
2. 포물선 $y=3+2x-x^2$과 두 직선 $x=1$, $x=2$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.

일정한 방향에 수직인 평면으로 립체를 잘랐을 때 생기는 자름면의 면적을 알수 있으면 립체의 체적을 적분으로 계산할수 있다.

이제 일정한 방향을 x축으로 잡고 립체가 점 $x=a$와 $x=b$에서 수직으로 세운 두 평면사이에 놓여있다고 하고 구간 $[a, b]$를 점

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

들로 n개의 부분으로 같게 나누고 매개 나눔점에서 x축에 수직인 평면을 세워 립체를 자르면 n개의 작은 립체가 생긴다.

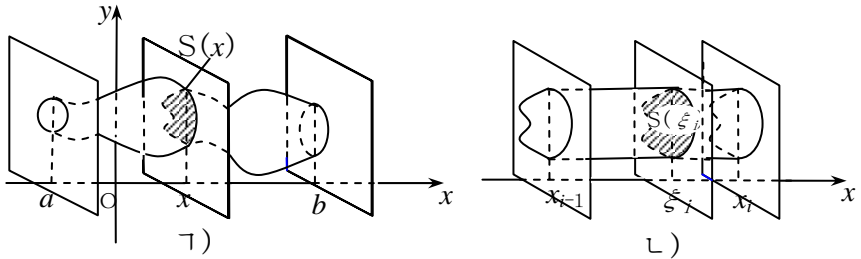



그림 4-9

나눔구간 $[x_{i-1}, x_i]$에서 임의의 한 점 ξ_i를 잡고 이 점에서 x축에 수직인 평면을 세워 자른 립체의 자름면의 면적을 $S(\xi_i)$라고 하면 $[x_{i-1}, x_i]$사이에 끼운 작은 립체의 체적은

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\frac{b-a}{n}$$

따라서 나눔점의 개수 n을 한없이 늘이면 $[a, b]$는 무한히 잘게 나누어지고

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\frac{b-a}{n}$$

로 정할수 있다.

이리하여 립체의 체적 V는 다음 공식으로 계산할수 있다.

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

례 3. 밑면의 면적이 S이고 높이가 H인 각뿔의 체적을 구하여라.

(풀이) 각뿔의 정점 O를 자리표원점으로 하고 정점에서 밑면에 그은 수직선을 x축으로 정하자. x축의 임의의 점 x에서 축에 수직으로 세운 평면이 각뿔을 자르는 자름면의 면적을 $S(x)$라고 하자. 이 자름면과 밑면은 닮은 도형

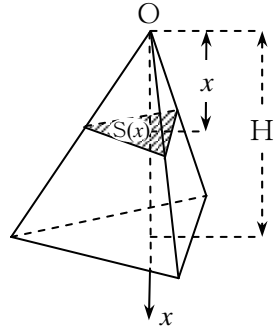



그림 4-10

이고 그 닮음비는 $\frac{x}{H}$이므로 그 면적의 비는

$$\frac{S(x)}{S} = \left(\frac{x}{H}\right)^2$$

따라서 $S(x) = \frac{S}{H^2}x^2$

이로부터 각뿔의 체적 V는

$$V = \int_0^H S(x)dx = \frac{S}{H^2}\int_0^H x^2 dx = \frac{S}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^H = \frac{1}{3}HS$$

특히 립체가 회전체이면 회전축에 수직인 평면으로 립체를 잘랐을 때 생기는 자름면의 면적을 쉽게 구할수 있다.

곡선 $y=f(x)$를 x축주위로 돌려서 생기는 회전체를 축에 수직인 평면으로 자를 때 그 자름면은 반경이 $|y|$인 원이다.

그러므로 자름면의 면적은

$$S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$$

이며 다음의 체적계산공식이 얻어진다.

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b f^2(x)\, dx$$

례 4. 반경이 R인 구의 체적을 구하여라.

(풀이) 구는 자리표원점을 중심으로 하는 반원을 x축주위로 돌려서 생긴 회전체이다.

자리표원점을 중심으로 하고 반경이 R인 원둘레의 방정식은 $x^2+y^2=\mathrm{R}^2$ 이다.

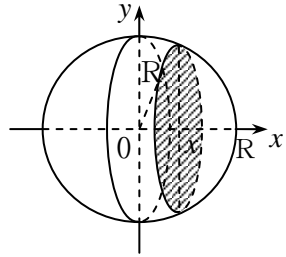
따라서

그림 4-11

$$y^2=\mathrm{R}^2-x^2$$

이리하여 반경이 R인 구의 체적 V는 다음과 같이 계산된다.

$$\mathrm{V}=\pi\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}}y^2dx=\pi\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}}(\mathrm{R}^2-x^2)dx=\pi(\mathrm{R}^2x-\frac{x^3}{3})\Big|_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}}=\frac{4}{3}\pi\mathrm{R}^3$$

문 제

1. 포물선 $y=2x^2$ 과 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.
2. 포물선 $y=x^2+1$, 두 직선 $x=-a$ 와 $x=a$ 로 둘러싸인 도형을 x축주위로 돌렸을 때 생기는 회전체의 체적을 구하여라.
3. 아래밑면의 반경이 R, 웃밑면의 반경이 r, 높이가 H인 원뿔대의 체적은

$$\mathrm{V}=\frac{\pi\mathrm{H}}{3}\left(\mathrm{R}^2+\mathrm{R}r+r^2\right)$$

이라는것을 이끌어내여라.

련습문제

1. 포물선 $y=4-x^2$ 과 직선 $y=-x+2$ 및 x축에 의하여 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.
2. 포물선 $y^2=9x$ 와 직선 $y=3x$ 로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.
3. 두 포물선 $y=2x^2-x-3$ 과 $y=-x^2+2x+3$ 에 의하여 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.

4. 곡선 $y=x^3$과 두 직선 $y=2x$, $y=x$로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.

5. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$를 x축주위로 돌려서 생기는 립체의 체적을 구하여라. 또한 y축주위로 돌렸을 때 생기는 립체의 체적을 구하여라.

6. 두 밑면의 면적이 각각 S_1, S_2, 높이가 H인 각뿔대의 체적이

$$V=\frac{1}{3}H\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)$$

로 된다는것을 밝혀라.

복습문제

1. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int_{-1}^{1}(x+1)dx$　　2) $\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)dx$

3) $\int_{1}^{3}2rdr$　　4) $\int_{0}^{1}(2x-1)^2dx$

2. 포물선 $y=x^2+1$ 과 직선 $y=5-3x$ 로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.

3. 다음 적분을 구하여라.

1) $\int_{1}^{3}(x-1)(3-x)dx$　　2) $\int_{0}^{t_1}(v_0-gt)dt$　　3) $\int_{-2}^{2}|x^2-1|dx$

4. 포물선 $y=x^2-6x+5$ 과 직선 $y=x-7$ 로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.

5. 다음 사실이 성립한다는것을 따져보아라.

1) $\int_{-a}^{a}x^2dx=2\int_{0}^{a}x^2dx$　　2) $\int_{-a}^{a}x^3dx=0$

6. 다음 부정적분을 구하여라.

1) $\int 3ax^4dx$　　2) $\int\left(2t^3-t^2\right)dt$

3) $\int\left(\frac{x^2}{4}-3x-\frac{1}{2}\right)dx$　　4) $\int(2x-1)(2-3x)dx$

5) $\int(t-1)^3dt$

7. 포물선 $y=x^2-3x$ 와 직선 $y+3x-4=0$ 으로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라.

8. 포물선 $y^2=2px$와 직선 $x=a$로 둘러싸인 도형을 x축주위로 돌렸을 때 생기는 립체의 체적을 구하여라.

기하학원본을 조선말로 번역한 수학자 리규경

18세기의 우리 나라 수학자 리규경은 수학의 발전력사를 개괄한 책 《수학의 시원》을 썼다. 그리고 1788년에는 중국말로 된 책 《기하학원본》을 우리 나라 말로 번역하였다. 이 책은 후에 일본에로 전파되였다고 한다.

《기하학원본》은 B.C. 3세기에 유클리드가 쓴 전 13권으로 된 책으로서 수학사의 《7대명작》중의 하나이다.

제5장. 확률과 통계

제1절. 사건과 확률

1. 사건과 그 산법

윷놀이를 할 때 윷가락을 던지면 《도》, 《개》, 《걸》, 《쌍》, 《모》가운데 어느 하나가 나온다.

윷가락을 던지는것과 같이 어떤 현상이 일어나도록 조건을 지어주는것을 **시행**, 《모》라든가 《개》와 같이 시행의 결과에 일어나는 현상을 **사건**이라고 부른다.

알아보기 1부터 10까지의 수가 하나씩 적혀있는 수자카드가 들어있는 통에서 아무렇게나 2개의 수자카드를 꺼낼 때 다음의 사건들이 일어날수 있는가?

1) 수들의 합이 2보다 작지 않을 사건
2) 수들의 합이 20과 같을 사건
3) 수들의 합이 10보다 작을 사건

> 시행의 결과 반드시 일어나는 사건을 **확실한 사건**, 절대로 일어나지 않는 사건을 **불가능한 사건**, 일어날수도 있고 일어나지 않을수도 있는 사건을 **우연사건**이라고 부른다.

확실한 사건을 Ω, 불가능한 사건을 ϕ로 표시하고 우연사건을 A, B, C,… 로 표시한다.

이러저러한 시행의 결과로 나타나는 사건들은 서로 련관되여있으며 몇개의 사건들이 결합되여 새로운 사건이 생긴다.

합사건

시행의 결과에 두 사건 A와 B가운데 어느 한 사건이 일어나도 일어나는 사건을 두 사건 A와 B의 합사건이라고 부르고 $A \cup B$(또는 $A+B$)로 표시한다.

실례로 사격시 목표판우에 있는 두 구역 A, B를 생각하고 총탄이 그 구역에 명중되는 사건을 동일한 기호 A, B로 표시하면 합사건은 $A \cup B$로 표시된다.

차사건

시행의 결과에 두 사건 A와 B가운데 A는 일어나고 B는 일어나지 않는 사건을 A와 B의 차사건이라고 부르고 $A\setminus B$(또는 A-B)로 표시한다.

적사건

시행의 결과에 A와 B가 동시에 일어나면 일어나는 사건을 사건 A와 B의 적사건이라고 부르고 $A\cap B$(또는 AB)로 표시한다.

사건 A와 B에 대하여 사건 A가 일어나면 늘 사건 B가 일어날 때 사건 A는 사건 B에 포함된다고 하고 $A\subseteq B$로 표시하며 $A\subseteq B$이고 $B\subseteq A$이면 A와 B는 같다고 말하고 $A=B$로 표시한다.

배반사건

두 사건 A, B에 대하여 $A\cap B=\phi$ 즉 적사건이 늘 불가능한 사건일 때 A와 B를 서로 배반이라고 부른다.

나머지사건

$A\cap B=\phi$, $A\cup B=\Omega$인 두 사건 A, B에 대하여 B를 A의 나머지사건(또는 A를 B의 나머지사건)이라고 부르고 $\overline{A}$ (또는 $\overline{B}$)로 표시한다.

례. 어떤 함에 1등품, 2등품, 3등품이 섞여있다. 여기서 아무렇게나 한개를 꺼낼 때 1, 2, 3등품이 나올 사건을 A_1, A_2, A_3으로 표시할 때 다음 사건들은 어떤 사건인가?

$$A_1\cup A_2,\ A_1\cap A_2,\ \overline{A_3},\ A_1\cup A_2\cup A_3,\ \overline{A_1\cup A_2}$$

(풀이) $A_1\cup A_2$는 1등품 또는 2등품이 나올 사건이고 $A_1\cap A_2$는 1등품도 나오고 2등품도 나올 사건인데 이것은 불가능하다.

$\overline{A_3}$은 3등품이 아닌것이 나올 사건이므로

$$\overline{A_3}=A_2\cup A_1$$

$A_1\cup A_2\cup A_3$은 1, 2, 3등품가운데 어느 하나가 나올 사건이므로 확실한 사건이다.

$\overline{A_1\cup A_2}$ 는 1등품이거나 2등품이 나오지 않을 사건이므로

$$\overline{A_1\cup A_2}=A_3$$

문제

1. 두 면에 각각 검은색과 흰색을 칠한 원판을 던지는 시행에서 다음의 사건은 어떤 사건인가?

1) 검은색과 흰색이 동시에 나타날 사건

2) 검은색이 나타날 사건

3) 검은색이나 흰색이 나타날 사건

4) 흰색이 나타날 사건

2. 다음 사건들은 어떤 사건인가?

1) 도체에 전기가 흐르면 열이 발생한다.

2) 보통온도에서 납땜은 녹는다.

3) 돌을 던지면 아래로 떨어진다.

4) 표준대기압에서 0℃이면 물은 언다.

5) 한 사람이 한번 사격하여 목표를 명중한다.

3. 어떤 제품이 합격품으로 되는 사건을 A, 불합격품으로 되는 사건을 B, 합격품가운데서도 1등품일 사건을 C, 1등품이 아닐 사건을 D로 표시하면 다음의 사건들은 어떤 사건들인가?

1) $A\cup B$, $A\cup C$, $B\cup C$

2) $A\cap B$, $A\cap C$, $A\cap D$

3) $A\backslash B$, $A\backslash C$, $A\backslash D$

4. 세 사건 A, B, C에 대하여 어느 사건이 사건 $\overline{A\cup B\cup C}$인가?

1) 세 사건가운데서 적어도 한 사건은 일어나지 않는다.

2) 세 사건이 다 일어나는것은 아니다.

3) 세 사건이 다 일어나지 않는다.

4) 어느 한 사건이라도 일어난다.

5. 세 사건 A, B, C가운데서 두 사건만 일어날 때 일어난다고 보는 사건을 산법기호를 써서 식으로 나타내여라.

2. 사건의 확률

자연현상들가운데는 우연적인것이 적지 않으므로 자연을 정복하고 그것을 인민경제발전에 더 잘 리용하기 위해서는 실천과정에서 부닥치게 되는 각이한 우연현상들을 분석해야 하며 이러저러한 사건들이 일어날 가능성을 타산해야 한다.

확률의 통계적정의

한번의 시행에서 주목하는 사건이 나타나겠는가 나타나지 않겠는가는 단정할수 없다. 그러나 같은 시행을 여러번 반복할 때 사건의 출현은 어떤 일정한 합법칙성에 따른다는것을 알수 있다.

이 합법칙성을 통하여 그것이 나타날 가능성정도를 량적으로 평가할수 있다.

앞면과 뒤면이 구별되는 원판을 던질 때 앞면이 나타날 가능성을 고찰하기 위해 진행한 실험결과를 표로 나타내면 다음과 같다.

던진 회수(n)	앞면출현수(k)	빈도률$\left(\frac{k}{n}\right)$
2 048	1 061	0.518 1
4 040	2 048	0.506 9
12 000	6 019	0.501 6
24 000	12 012	0.500 5
30 000	14 984	0.499 6
72 088	36 124	0.501 1

n번의 시행에서 사건 A가 k번 일어났다고 할 때 k를 사건 A의 빈도수, 비 $\frac{k}{n}$를 사건 A의 빈도률이라고 부른다.

알아보기 원판을 던지는 시행에서

1) n이 커질 때 빈도률 $\frac{k}{n}$는 어떤 수에 가까와가는가?

2) 원판을 던질 때 앞면이 나타날 가능성을 얼마로 보아야 하겠는가?

많은 실험결과는 시행의 회수 n을 크게 하면 빈도률 $\frac{k}{n}$가 어떤 수 P에 가까와간다는것을 보여준다. 이 수 P를 사건 A의 확률이라고 부른다.

이렇게 확률을 정하는것을 **확률의 통계적정의**라고 부른다.

통계적방법으로 확률을 구하자면 시행을 수많이 되풀이해야 하는데 이렇게 하는것은 어려우므로 시행회수 n이 상당히 클 때의 빈도률 $\frac{k}{n}$를 사건 A의 확률로 본다. 그러므로 이 확률은 어디까지나 근사값이다.

례 1. 원판을 던지는 시행에서 앞면이 나타나는 사건의 빈도률 $\frac{k}{n}$는 n이 커짐에 따라 0.5에 접근한다.
따라서 이 사건의 확률은 P=0.5이다.

례 2. 어느 공장에서 생산한 전구 2 000알가운데 수명이 3 000시간이상 되는것이 1 860알 들어있다. 이런 전구들이 들어있는 통안에서 아무렇게나 한개 꺼냈을 때 그것의 수명이 3 000시간이상일 확률을 구하여라.

$$\mathrm{P}=\frac{1860}{2000}=0.93$$

문 제

1. 어떤 사수가 동일한 조건밑에서 사격을 진행한 결과 다음 표와 같은 성적을 얻었다면 명중확률은 얼마이겠는가? 사수는 매 사격에서 10발씩 쏘았다고 한다.

회 수	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
명 중 한 회 수	9	9	10	10	10	8	9	9	10	10	9	8	7

2. 통안에 15개의 제품이 들어있다. 통안에서 아무렇게나 한개의 제품을 꺼내여 그것이 몇등품인가를 조사하고 다시 통안에 넣는다. 이렇게 500번 조사하였는데 1등품이 324번 나타났다. 1등품이 통안에 몇개나 있다고 볼수 있는가?

고전적정의

어떤 사건들에 대해서는 시행을 반복하지 않고 그 확률을 정할 수 있다.

알아보기 주사위(그림 5-1)를 한번 던질 때 웃면에 i개의 눈이 나타나는 사건을 각각 E_i($i=1, 2, \cdots, 6$)라고 표시하면

1) 일어날수 있는 사건이 몇가지인가?
2) 사건 E_2 이 나타날 가능성은 얼마인가? 사건 E_3 이 나타날 가능성은 얼마인가?
3) E_i 들가운데 한 사건이 일어날 때 다른 사건도 함께 일어나는 경우가 있는가?
4) 웃면에 짝수개의 눈이 나타나는 사건은 어떤 사건들로 이루어지는가?
5) 웃면에 3의 배수개의 눈이 나타나는 사건은 어떤 사건들로 이루어지는가?

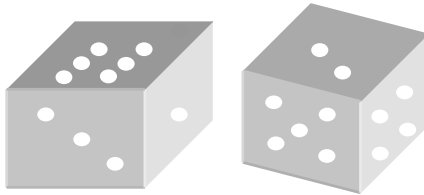



그림 5-1

한번의 시행에서 나타날수 있는 사건을 **요소사건**이라고 부른다.

이때 어떤 두 요소사건도 서로 배반이며 모든 사건들은 요소사건들로 이루어진다.

이제부터 한번 시행에서 나타날 가능성이 같은 n개의 요소사건이 일어나는 경우를 고찰하겠다.

례 3. 윷가락을 던지는 시행에서 요소사건의 수는 얼마인가?

(풀이) 윷가락은 앞면과 뒤면이 구별되는 4개의 가락으로 되여 있다.

이것들을 던질 때 매 가락은 앞면 또는 뒤면의 어느 한 면만을 나타낸다.

앞면이 한번도 나타나지 않는 경우 C_4^0

앞면이 한개 나타나는 경우 C_4^1

앞면이 두개 나타나는 경우 C_4^2

앞면이 세개 나타나는 경우 C_4^3

모두 앞면인 경우 C_4^4

모든 요소사건수 $C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=16$

알아보기 만년필이 7자루, 원주필이 3자루 들어있는 통에서 아무렇게나 한자루 꺼낼 때 그것이 만년필일 가능성이 크다고 말하면 옳은가? 왜 그런가?

한 시행에서 일어날수 있는 요소사건들이 모두 n개이고 사건 A가 $k(0\le k\le n)$ 개의 요소사건들로 이루어진 사건이면 $\frac{k}{n}$를 사건 A의 **확률**이라고 부르며 P(A)로 표시한다. 즉 $$P(A)=\frac{k}{n}$$

이렇게 확률을 정하는것을 **확률의 고전적정의**라고 부른다.

아무런 사건 A에 대해서나 늘 $0\le P(A)\le 1$이다. 특히

$P(\Omega)=1,\quad P(\phi)=0$이다.

례 4. 앞면과 뒤면이 구별되는 원판을 던지는 시행에서 요소사건수는 2이고 앞면이 나타나는 사건은 1개이므로 앞면이 나타날 사건을 A라고 하면

$$P(A)=\frac{1}{2}$$

이것은 앞에서 통계적방법으로 구한 확률과 일치한다.

례 5. 윷놀이를 할 때 《도》,《개》,《걸》,《윷》,《모》가 나오는 사건들의 확률이 같은 사건이라고 볼수 있는가?

(풀이) 윷가락을 던지는 시행에서 요소사건수는 16이다. 《도》, 《개》,《걸》,《쓩》,《모》가 나오는 사건들을 A, B, C, D, E라고 하자.

윷가락 4개가운데서 한개만 앞면이 나타난것이 《도》이므로 《도》가 나오는 사건은 C_4^1개의 요소사건으로 이루어진다.

따라서

$$P(A)=\frac{C_4^1}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

《개》가 나오는 사건은 C_4^2개의 요소사건으로 이루어지므로

$$P(B)=\frac{C_4^2}{16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

《걸》이 나오는 사건은 C_4^3의 요소사건으로 이루어지므로

$$P(C)=\frac{C_4^3}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

《쓩》과 《모》는 각각 C_4^4, C_4^0개의 요소사건으로 이루어진다.

그런데 $C_4^0=C_4^4=1$이므로

$$P(D)=P(E)=\frac{1}{16}$$

그러므로

$$P(D)=P(E)<P(A)=P(C)<P(B)$$

례 6. 어떤 양어장에서 100마리의 물고기를 잡아 붉은 표식을 하여 놓아주었다. 얼마후 새로 고기를 100마리 잡아보니 붉은 표식이 있는 고기가 2마리였다. 저수지에 물고기가 모두 몇마리 있겠는가?

(풀이) 저수지에 있는 물고기수를 x라고 하고 이때 임의로 한마리의 물고기를 잡았을 때 붉은 표식이 있을 확률은 $\frac{100}{x}$이라고 볼수 있다.

한편 100마리를 잡았을 때 붉은 표식이 있는것이 2마리였으므로 붉은 표식이 있는 물고기가 잡힐 확률은 $\frac{2}{100}$ 이다.

따라서

$$\frac{100}{x}=\frac{2}{100}$$

$$x=5000$$

답. 5 000마리

(주의) 이 실례에서 $\frac{2}{100}$ 는 통계적정의에 기초하고있으며 $\frac{100}{x}$ 은 고전적정의에 기초하고있다.

문 제

1. 3개의 정수와 2개의 부수가 있다. 그가운데서 아무렇게나 2개를 잡을 때 그것들의 적이 정수일 사건 A와 부수일 사건 B의 확률을 구하여라.

2. 주사위를 2개 던졌을 때 웃면에 나타나는 눈수의 합이 9로 될 사건의 확률을 구하여라.

3. 매 면을 고르롭게 칠한 바른6면체를 1 000개의 크기가 꼭같은 쪼각바른6면체로 나누고 섞은 다음 임의로 한쪼각 바른6면체를 잡았을 때 2개 면이 색칠되였을 확률을 구하여라. 또 어느 면도 색칠되지 않았을 확률을 구하여라.

4. 1등품이 10개, 2등품이 3개, 3등품이 2개 들어있는 통에서

1) 아무렇게나 한개를 꺼낸것이 1등품일 확률을 구하여라.

2) 아무렇게나 2개를 꺼낸것이 다 1등품일 확률을 구하여라.

3) 아무렇게나 2개를 꺼냈을 때 그가운데 하나는 1등품이고 다른 하나는 2등품일 확률을 구하여라.

5. 같은 종류의 제품 N개가운데 1등품이 M($\leq$N)개 있다. 여기서 아무렇게나 n($\leq$N)개를 꺼낼 때 거기에 1등품이 m($\leq$M)개 있을 확률을 구하여라.

3. 더하기정리와 곱하기정리

더하기정리

> **정리 1.** 배반사건의 합사건의 확률은 매개 사건의 확률의 합과 같다. 즉
>
> $A \cap B = \phi$ 이면
>
> $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(증명) 요소사건들의 개수를 n, 이가운데서 사건 A, B를 이루는 요소사건의 수를 각각 m_1, m_2 라면

$$P(A) = \frac{m_1}{n}, \quad P(B) = \frac{m_2}{n}$$

A, B는 배반사건이므로 $A \cup B$는 $m_1 + m_2$ 의 요소사건들로 이루어진다.

따라서

$$P(A \cup B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$$

일반적으로 사건 A_1, A_2, A_3, …, A_n 들이 서로 배반이면

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

> **계.** 사건 A 의 나머지사건 $\overline{A}$ 의 확률은
>
> $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(증명) A와 $\overline{A}$ 는 배반사건이고 $A \cup \overline{A} = \Omega$ 이므로 정리 1에 의해

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

따라서

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

례 1. 60개의 제품이 들어있는 상자에서 1등품이 51개, 2등품이 7개, 3등품이 2개라고 한다. 이 상자에서 아무렇게나 한개의 제품을 꺼낼 때 그것이 1등품이거나 2등품일 사건 C와 3등품일 사건 D의 확률을 구하여라.

(풀이) 꺼낸 제품이 1등품일 사건을 A, 2등품일 사건을 B로 표시하면

$$P(A)=\frac{51}{60},\quad P(B)=\frac{7}{60}$$

그런데 C= A∪B, A∩B=ϕ이므로

$$P(C)=P(A)+P(B)=\frac{51}{60}+\frac{7}{60}=\frac{58}{60}=\frac{29}{30}$$

그리고 $P=\overline{C}$ 이므로

$$P(D)=1-P(C)=1-\frac{29}{30}=\frac{1}{30}$$

례 2. 20마리의 토끼가운데 검은토끼가 7마리이고 나머지는 흰토끼이다. 이가운데서 아무렇게나 4마리의 토끼를 꺼낼 때 적어도 한마리가 검은토끼일 확률을 구하여라.

(풀이) 20마리가운데서 4마리를 꺼내는 시행이므로 가능한 경우수는 C_{20}^4 이다.

그가운데 4마리가 모두 흰토끼일 사건은 C_{13}^4 개의 요소사건으로 이루어진다. 이 사건을 A로 표시하면 4마리가운데 적어도 한마리가 검은토끼일 사건은 $\overline{A}$ 이므로 그 확률은 다음과 같다.

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{C_{13}^4}{C_{20}^4}=1-\frac{13\cdot12\cdot11\cdot10}{20\cdot19\cdot18\cdot17}$$

$$=1-\frac{143}{969}=\frac{826}{969}\approx0.85$$

일반적으로 임의의 두 사건 A, B에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

례 3. 100이하의 자연수가운데서 임의로 잡은 수가 2 또는 5로 완제될 확률을 구하여라.

(풀이) 임의로 잡은 수가 2로 완제될 사건을 A_1, 5로 완제될 사건을 A_2로 표시하면 2 또는 5로 완제될 사건은 A_1과 A_2의 합사건이다.

그런데 2와 5로 완제되는 수 즉 10의 배수들이 있으므로

$$A_1 \cap A_2 \neq \phi$$

그러므로 A_1과 A_2는 배반사건이 아니다.

따라서

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$
$$= \frac{50}{100} + \frac{20}{100} - \frac{10}{100} = \frac{3}{5}$$

문 제

1. 50개의 제품가운데 2등품이 10개 있다고 한다. 아무렇게나 5개의 제품을 꺼낼 때 2등품이 적어도 한개 들어있을 확률을 구하여라.
2. 40개의 공가운데 롱구공이 10개 들어있다. 아무렇게나 6개의 공을 잡을 때 롱구공이 2개이상일 확률을 구하여라.
3. 일반화된 더하기공식 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$를 증명하여라.
4. 1부터 20까지의 수를 하나씩 써넣은 20개의 카드가운데서 아무렇게나 한 카드를 잡았을 때 거기에 적힌 수가 2의 배수이거나 3의 배수일 확률을 구하여라.
5. 1부터 20까지의 번호를 붙인 20장의 카드가 있는 상자에서 임의로 3장을 꺼낼 때 5의 배수가 적어도 하나 들어있을 확률은 (　)이다.

   1) $\frac{19}{5}$　　2) $\frac{29}{57}$　　3) $\frac{39}{57}$　　4) $\frac{49}{57}$

곱하기정리

알아보기 1) 두개의 주사위를 하나씩 던질 때 두번째 주사위의 웃면에 1의 눈이 나타나는 사건의 확률은 첫번째 주사위의 웃면에 어떤 눈이 나타났는가에 관계되는가?

2) 흰공이 7개, 검은공이 3개 들어있는 통에서 2개의 공을 임의로 꺼낼 때 두번째로 꺼낸 공이 흰공일 사건의 확률은 첫번째로 어떤 공을 꺼냈는가에 관계되는가?

1)에서 둘째 주사위의 웃면에 1의 눈이 나타나는 사건은 첫번째 주사위의 웃면에 어떤 수의 눈이 나타났는가에 관계없이 일어날수도 있고 일어나지 않을수도 있다. 이와 같이 두 사건 A, B에서 어느 한 사건이 일어날 확률이 다른 사건이 일어났는가 일어나지 않았는가에 관계되지 않을 때 두 사건 A, B는 서로 **독립**이라고 말한다.

2)에서와 같이 일반적으로 시행을 두번 실시할 때 첫 시행에서 사건 A가 일어났는가 일어나지 않았는가에 따라 두번째 시행에서 사건 B가 일어날 확률이 달라질 때 사건 B는 사건 A에 종속된다고 말한다.

> 사건 A가 일어난 조건밑에서 사건 B가 일어날 확률을 **조건부확률**이라고 부르고 $P_A(B)$로 표시한다.

례 4. 흰공이 7개, 검은공이 3개 들어있는 통에서 처음 꺼낸 공이 흰공일 사건 A, 두번째로 꺼낸 공이 흰공일 사건을 B라면 $P_A(B)$, $P_{\overline{A}}(B)$는 어떤 사건의 확률이며 그 값은 얼마인가?

(풀이) $P_A(B)$는 첫번째로 흰공을 꺼낸 조건밑에서 두번째로 흰공을 꺼낼 사건의 확률이다. 그러므로

$$P_A(B)=\frac{7-1}{7+3-1}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

$P_{\overline{A}}(B)$는 첫번째로 검은공을 꺼낸 조건밑에서 두번째로 흰공을 꺼낼 사건의 확률이다. 그러므로

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{7}{10-1}=\frac{7}{9}$$

정리 2. 두 사건 A, B의 적사건의 확률은 한 사건의 확률에 이 사건이 일어난 조건밑에서 다른 사건이 일어날 조건부 확률을 곱한 적과 같다. 즉

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

(증명) 요소사건의 수를 n, 그가운데서 사건 A, A∩B를 이루는 요소사건의 수를 각각 m, k라고 하면

$$P(A \cap B) = \frac{k}{n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{m}$$

그런데 $\frac{m}{n} = P(A)$, $\frac{k}{m} = P_A(B)$ 이므로

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

마찬가지로 $P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$ 도 증명된다.

A, B가 독립이라면

$$P_A(B) = P(B), \quad P_B(A) = P(A)$$

이므로

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

3개이상의 사건들에 대해서는 다음 공식이 성립한다.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) P_A(B) P_{A \cap B}(C)$$

례 5. 100개의 제품이 들어있는 제품상자가 있다. 상자에서 5개의 제품을 하나씩 꺼내여 검사하는데 한개라도 불합격품이 나오면 그 상자의 제품은 모두 불합격으로 판정된다고 하자. 상자안에 불합격품이 5개정도 들어있다고 하면 이 제품상자가 불합격으로 판정될 확률은 얼마인가?

(풀이) 제품상자가 합격으로 판정될 사건을 A, i번째 검사에서 합격품이 나올 사건을 A_i $(i = 1, 2, \cdots, 5)$ 라고 하면

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$$

곱하기정리에 의해

$$P(A)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)P_{A_1\cap A_2\cap A_3}(A_4)$$

$$P_{A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4}(A_5)$$

100개가운데 합격품이 95개이므로

$$P(A_1)=\frac{95}{100}$$

$$P_{A_1}(A_2)=\frac{95-1}{100-1}=\frac{94}{99}$$

$$P_{A_1\cap A_2}(A_3)=\frac{94-1}{99-1}=\frac{93}{98}$$

$$P_{A_1\cap A_2\cap A_3}(A_4)=\frac{93-1}{98-1}=\frac{92}{97}$$

$$P_{A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4}(A_5)=\frac{92-1}{97-1}=\frac{91}{96}$$

따라서

$$P(A)=\frac{95}{100}\cdot\frac{94}{99}\cdot\frac{93}{98}\cdot\frac{92}{97}\cdot\frac{91}{96}\approx 0.77$$

제품상자가 불합격품으로 판정될 확률은

$$1-P(A)\approx 0.23$$

문 제

1. 100개의 부속품가운데 2등품이 1개 있다. 부속품을 한개씩 꺼내서 질을 검사할 때 다음 확률을 구하여라.

1) 첫번째에 2등품이 나올 확률

2) 두번째에 2등품이 나올 확률

3) 세번째에 2등품이 나올 확률

2. 흰공이 4개, 붉은공이 3개 들어있는 통에서 공을 한개씩 꺼낸다. 첫째것이 흰공이고 둘째것이 붉은공일 확률을 구하여라.

3. 세 종류의 전자요소가 고장없이 동작할 확률이 각각 0.8, 0.85, 0.9이다. 이 요소들은 각각 독립적으로 동작한다. 이 세 요소가 다 고장없이 동작하게 될 확률을 구하여라.

련습문제

1. 다음 명제들에서 옳은것을 찾아보아라.

1) 총을 쏠 때 목표를 명중하는 사건과 명중하지 못하는 사건은 일어날 가능성이 같은 사건이다.

2) $P(A\cup B)=1$이면 A와 B는 서로 나머지사건이다.

3) $P(A)+P(B)=1$은 두 사건 A, B가 서로 나머지사건이기 위한 필요조건이다.

4) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$이면 사건 A, B는 서로 독립이다.

5) A, B가 배반사건이면 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$이다.

2. 아무렇게나 두자리수를 쓸 때 그 수자들의 합이 10으로 될 확률을 구하여라.

3. 토끼를 많이 기를데 대하여 주신 위대한 장군님의 유훈을 높이 받들고 영희네 집에서는 많은 토끼를 기르고있다. 20마리의 토끼가운데 5마리가 검은토끼이다. 이가운데서 아무렇게나 2마리를 꺼낸것이 다 검은토끼일 확률을 구하여라.

4. 상자속에 6개의 흰공과 4개의 검은공이 들어있다. 이 상자속에서 임의로 3개의 공을 꺼낼 때 그중 2개가 흰공, 한개가 검은공일 확률을 구하여라.

5. 1부터 9까지의 수자를 하나씩 쓴 9매의 카드가 있다. 이가운데서 아무렇게나 5개의 카드를 꺼낼 때

1) 1, 2, 3이 다 들어있을 확률을 구하여라.

2) 7이상이 하나만 들어있을 확률을 구하여라.

6. 학생 15명가운데서 탁구선수 4명을 뽑으려고 한다. 이때 이미 지정된 2명이 다 탁구선수로 뽑힐 확률은 얼마인가?

7. 은철이와 창현이가 속한 6학년 2반은 40명이다. 이 학급 학생들을 4개 학습반으로 10명씩 가를 때 은철이와 창현이가 한 학습반에 속할 확률을 구하여라.

8. 전기회로에 직렬로 련결된 3개의 요소가 있다. 전압이 2배로 올라갈 때 매개 요소가 파괴될 확률은 각각 0.3, 0.4, 0.6이다. 이 회로가 끊어지지 않을 확률을 구하여라.

9. 어떤 전기회로에 20개의 요소가 있다. 이 요소들은 독립적으로 작용하며 고장없이 가동할 확률은 모두 0.7이다. 매 요소들이 동시에 가동할 확률은 다음것들가운데 어느것인가?

1) $1-0.3^{20}$ 2) $1-0.7^{20}$ 3) 0.3^{20} 4) 0.7^{20}

10. 불량품이 5% 들어있는 통에서 5개의 제품을 꺼낼 때 불량품이 한개 들어있을 확률은 다음것들가운데 어느것인가?

1) $\frac{C_5^1 \times C_{95}^4}{C_{100}^5}$　　2) $0.95^4 \times 0.05$

3) 4×0.95^4　　4) $5 \times 0.95^4 \times 0.05$

제2절. 통계자료처리

통계란 어떤 현상을 특징짓는 자료들을 조사하여 체계적으로 기록하여놓거나 조사자료에 기초하여 관측한 대상의 특징을 분석하기 위하여 자료들을 분류하고 종합하는것을 말한다.

관측결과를 체계적으로 기록하여놓은것은 **통계자료**라고 부른다.

실례로 어떤 지역의 인구구성자료, 여러가지 제품의 생산량에 관한 자료, 생산물들의 이러저러한 특성에 관한 자료, 나이별에 따르는 예방접종자료, 지자기현상이 일어난 날자 같은것을 체계적으로 기록하여 놓은것들은 모두 통계자료로 된다.

관측자료에 기초하여 관측한 대상의 특성을 분석하기 위하여 자료들을 분류하고 종합하는것을 **통계자료처리**라고 부른다.

1. 빈도수분포표

알아보기 다음 표는 어느 한 직장 종업원명단에 따르는 로동자들의 기능급수자료이다.

표 1

5	6	4	4	3	6	5	5	6	6
5	5	6	4	7	4	4	5	3	7
5	4	6	5	5	5	6	3	7	3
5	7	7	5	4	5	6	5	4	5
4	5	7	6	4	6	3	5	5	4

1) 이 직장 로동자들의 기능급수가 몇급부터 몇급까지인가?

2) 어느 급수를 가진 로동자들이 제일 많고 어느 급수를 가진 로동자들이 제일 적은가?

3) 이것을 한눈에 알아보자면 표를 어떻게 작성하면 되는가?

이 통계를 다음과 같이 작성하면 직장의 종업원들의 기능급수에 대한 정확한 인식을 가질수 있다.

급수	3	4	5	6	7	계
인원	5	11	18	10	6	50

이와 같이 관측자료를 특성이 같은것을 조로 편성하여놓은것을 **빈도수분포표**라고 부른다.

빈도수분포표는 관측대상과 그 대상에 대한 빈도수를 한눈에 알아볼수 있게 만들어진 통계분류의 한 형식이다.

통계를 빈도수분포표형식으로 종합하는것은 여러 분야에서 널리 쓰이고있다.

학생들의 학과목별성적종합표, 사격선수들의 사격결과에 대한 성적종합표, 소대별실탄사격종합표들은 모두 빈도수분포표이다.

례 1. 다음 표는 20차례에 걸쳐 진행한 어느 학급 학생들의 시험성적을 학생별로 종합하여 써놓은것이다. 여기서 《학생》칸의 수들은 출석부번호이다.

표 2

학생	성적	학생	성적	학생	성적	학생	성적
1	72	11	63	21	58	31	86
2	83	12	88	22	53	32	100
3	57	13	79	23	86	33	82
4	43	14	93	24	83	34	68
5	59	15	86	25	80	35	96
6	90	16	59	26	89	36	64
7	68	17	86	27	79	37	70
8	55	18	71	28	76	38	53
9	96	19	62	29	99		
10	82	20	75	30	63		

이 표를 통하여 매 학생의 성적이나 성적의 한계 같은것은 알수 있으나 실력이 높은 학생수를 인차 알아보기 어렵다.

이 자료를 40점부터 100점까지를 10점간격으로 갈라놓고 거기에 해당한 학생수를 적는 방법으로 표를 작성하면 표 3과 같다.

표 3

점수구간(급)	학생수(빈도수)
40~50	1
50~60	7
60~70	6
70~80	7
80~90	11
90~100	6
계	38

이와 같이 자료들을 정리하여 만든 구간을 **급**, 급간의 너비를 **급간격**, 구간에 들어있는 자료의 개수를 그 급의 **빈도수**라고 부른다.

이런 표를 **급분류빈도수분포표**라고 부른다. 그리고 제일 큰것에서 제일 작은것을 던 차를 **분포범위**라고 부른다.

례 1에서

분포범위 : 100-43=57

급간격 : 10

급중심 : 45, 55, 65, 75, 85, 95

급이나 자료수가 많은 경우에 빈도수분포표만 보고서는 례를 들어 60점미만은 몇명인가, 80점이상은 몇명인가 하는것을 인차 알아내기 어렵다.

그래서 빈도수의 루적을 생각할 때도 있다.

첫째 급으로부터 어떤 급까지의 빈도수를 다 더한것을 그 급의 **루적빈도수**라고 부르고 루적빈도수를 써넣은 빈도수분포표를 **루적빈도수분포표**라고 부른다.

한 급의 빈도수를 전체 빈도수의 합으로 나눈것을 그 급의 **빈도률**이라고 부르며 빈도률을 적어놓은 표를 **빈도률분포표**라고 부른다.

례 2. 표 4는 중학교 5학년 학생 40명의 키를 잰 결과를 기록한것이다. 이것을 가지고 급간격이 5cm인 빈도수분포표와 루적빈도수분포표를 만들어라.(첫째 급은 140이상, 145미만으로 하여라.)

표 4

학생	키(㎝)	학생	키(㎝)	학 생	키(㎝)	학생	키(㎝)
1	161	11	157	21	174	31	159
2	153	12	163	22	163	32	166
3	168	13	164	23	150	33	172
4	156	14	154	24	158	34	149
5	163	15	162	25	160	35	162
6	154	16	164	26	153	36	165
7	164	17	159	27	163	37	152
8	163	18	147	28	158	38	169
9	155	19	163	29	144	39	157
10	156	20	158	30	165	40	168

(풀이) 빈도수분포표와 루적빈도수분포표는 다음과 같다.

급	빈도수
140~145	1
145~150	2
150~155	6
155~160	10
160~165	13
165~170	6
170~175	2
계	40

급	루적빈도수
140~145	1
145~150	3
150~155	9
155~160	19
160~165	32
165~170	38
170~175	40

문 제

1. 례 2에서 키가 155cm미만인 학생은 몇명인가? 160cm이상은 몇명인가?

2. 례 2에서 키에 대한 빈도률분포표를 만들어라.

3. 다음 표는 어떤 학급 학생들의 키에 대한 급분류빈도수분포표이다. 루적빈도수분포표, 빈도률분포표를 만들어라.

표 5

급(키)	140∼	145∼	150∼	155∼	160∼	165∼∼170	계
빈도수(명)	1	3	9	17	8	2	40

2. 순서통계

통계를 커지는 차례로 써놓은것을 순서통계라고 부른다.

순서통계에서 제일 작은 값(왼쪽에 있다.)을 최소값이라고 부르고 $x_{\min}$로, 제일 큰 값을 최대값(오른쪽에 있다.)이라고 부르고 $x_{\max}$로 표시한다.

그리고 $R = x_{\max} - x_{\min}$을 분포범위라고 부르며 가운데있는 자료(개수가 홀수일 때는 가운데위치에 있는 자료, 개수가 짝수일 때는 가운데있는 두 자료의 합평균)를 중위값이라고 부르고 x_{me}로 표시한다.

례. 학과경연에서 10명의 학생들이 얻은 점수자료는 다음과 같다.

28, 26, 24, 24, 25, 25, 26, 27, 29, 23

순서통계는

23, 24, 24, 25, 25, 26, 26, 27, 28, 29

$x_{\min} = 23$, $x_{\max} = 29$, $R = 6$, $x_{me} = 25.7$

이처럼 집단의 최소값, 최대값, 중위값, 분포범위를 알려고 할 때에는 이미 있는 통계자료로부터 순서통계를 만들어야 한다.

문 제

1. 학생 6명의 몸질량을 재여 얻은 자료는 다음과 같다.

59.7, 49.5, 54.4, 63.2, 61.3, 57.1

순서통계를 만들고 평균값, 최소값, 최대값, 중위값, 분포범위를 구하여라.

2. 5명의 학생의 키는 다음과 같다.

162.2, 152.1, 165.4, 171.8, 172

순서통계를 만들고 평균값, 최소값, 최대값, 중위값, 분포범위를 구하여라.

3. 통계작성방법

통계는 객관적인 대상의 특성을 연구하기 위하여 체계적으로 관측한 결과를 수자로 기록한것이다. 그러므로 처음부터 기록을 어떤 형식으로 하여야 특성을 정확히 알아낼수 있겠는가 하는 문제가 나선다. 그러므로 통계양식문제와 관측대상에서 어떤 대상을 택하는 문제가 중요하다.

수리통계학에서는 관측대상전체를 모집단이라고 부르며 거기로부터 직접 관측하는 대상을 표본이라고 부른다. 표본에 들어있는 대상의 수를 표본의 크기라고 부른다.

표본은 객관성을 보장할수 있게 우연적으로 뽑는다.

그러므로 표본의 개개는 우연량으로 된다.

모집단에서 꺼낸 표본에 대한 관측자료는 관측값과 개수를 표시하는 형식과 대상이 어떤 급으로 구분되여 표현되는 형식이 있다.

관측회수가 n일 때

1° 관측값렬형식

관측값
x_1
x_2
$\vdots$
x_n

2° 빈도수분포표형식

관측값	빈도수
x_1	n_1
x_2	n_2
$\vdots$	$\vdots$
x_k	n_k
계	n

$$n=\sum_{i=1}^{k} n_i$$

3° 급분류빈도수분포표형식

급	급중심	빈도수
a_1-a_2	x_1	n_1
a_2-a_3	x_2	n_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_k-a_{k-1}	x_k	n_k
계		n

$$x_i=\frac{a_{i+1}+a_i}{2}$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$$

통계는 모집단의 특성을 알기 위해 만들어진 자료이다. 모집단의 특성값(수학적기대값과 분산)을 알기 위해 표본을 리용한다.

4. 통계량

조사나 관측을 통하여 얻은 자료의 분포상태는 평균값과 분산에 의해 특징지어진다.

1) 평균값

자료들의 총합을 자료의 개수로 나눈것을 평균값이라고 부르고 $\bar{x}$로 표시한다. 즉 n개의 자료 x_1, x_2, $\cdots$, x_n에 대하여

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \qquad (1)$$

자료가 그리 많지 않을 때에는 매 자료를 하나하나 더할수 있지만 많은 자료를 다룰 때에는 빈도수분포표형식으로 주어질수 있으므로 평균값으로 다음것을 리용한다.

자료가 빈도수분포표로 다음과 같이 주어지면

자 료	x_1 x_2 ······ x_{k-1} x_k	계
빈도수	f_1 f_2 ······ f_{k-1} f_k	n

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_k f_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i f_i \quad \left(\sum_{i=1}^{k} f_i = n\right) \qquad (2)$$

자료가 급분류빈도수분포표로 주어지면

급중심	x_1 x_2 ······ x_{k-1} x_k	계
빈도수	f_1 f_2 ······ f_{k-1} f_k	n

$$\bar{x} \approx \frac{1}{n}(x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_k f_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i f_i \quad \left(\sum_{i=1}^{k} f_i = n\right) \qquad (3)$$

례 1. 표 2와 표 3을 가지고 평균성적을 계산하여 비교하여라.

(풀이) (2)에 의해 구하면 평균성적은

$$\bar{x} = \frac{1}{38}(43 + 53 \times 2 + 55 + \cdots + 96 \times 2 + 99 + 100)$$

$$= \frac{2853}{38} \approx 75.08$$

(2)에 의해 구하면

$$\bar{x} \approx \frac{1}{38}(45 \times 1 + 55 \times 7 + 65 \times 6 + 75 \times 7 + 85 \times 11 + 95 \times 6)$$

$$= \frac{2850}{38} = 75$$

75는 평균성적 75.08의 근사값이다.

앞으로 자료가 급분류빈도수분포표로 주어졌을 때는 (3)에 의해 정해지는 값을 평균값으로 보고 $\bar{x}$로 표시한다.

급중심 x_i 들가운데서 빈도수가 비교적 크고 거의 가운데 놓인 급의 급중심 a를 **가평균**이라고 부른다.

급간격이 h라고 할 때

$$u_i = \frac{1}{h}(x_i - a) \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ k)$$

라고 놓으면 $x_i = a + u_i h$ 이므로

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_k f_k = an + h(u_1 f_1 + \cdots + u_k f_k)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_k f_k) = a + \frac{h}{n}(u_1 f_1 + u_2 f_2 + \cdots + u_k f_k)$$

여기서 $\frac{1}{n}(u_1 f_1 + u_2 f_2 + \cdots + u_k f_k) = \bar{u}$ 라고 하면

$$\bar{x} = a + h\bar{u}$$

$\overline{u}$를 계산하는것은 $\overline{x}$를 계산하기보다 간단하므로 이 식을 써서 평균값을 구하는것이 편리할 때가 많다.

례 2. 표 4로 주어진 자료에 대하여 평균키를 두가지 방법으로 구하여라.

(풀이) 공식에 의해 구하면

$$\overline{x} = \frac{6390}{40} = 159.75$$

$(a = 162.5)$

급중심 x_i	f_i	u_i	$x_i f_i$	$u_i f_i$
142.5	1	-4	142.5	-4
147.5	2	-3	295	-6
152.5	6	-2	915	-12
157.5	10	-1	1 575	-10
162.5	13	0	2 112.5	0
167.5	6	1	1 005	6
172.5	2	2	345	4
계	40	-7	6 390	-22

가평균을 리용하면 이 표에서 보는것처럼 $\overline{u}$의 계산이 쉽다.

$$\overline{x} = 162.5 + 5 \times \frac{(-22)}{40} = 159.75$$

문 제

1. 급분류빈도수분포표를 가지고 평균값을 계산할 때 급중심이 아니라 매개 급의 평균값을 리용하면 $\overline{x}$는 시초자료를 가지고 계산한 평균값과 일치한다. 왜 그런가?

2. 례 1에서 평균성적을 가평균을 써서 구하여라.

3. 아래의 표에 따르는 닭알의 평균질량을 구하여라.

닭알의 질량 (g)	45~	50~	55~	60~	65~	70~75	계
빈도수 (알)	6	41	123	190	111	29	500

2) 분산

자료들의 분포상태를 알자면 분포의 범위나 평균값과 같은 분포의 중심위치와 함께 그로부터 흩어진 정도를 나타내는 수값도 알아내야 한다.

자료들의 흩어진 정도를 나타내는 수값을 분산도라고 부른다.

매 자료에 대하여 $x_k - \bar{x}$ 를 $x_k \left(k = 1, 2, \cdots, n\right)$의 편차라고 부른다.

알아보기 편차의 평균값으로 흩어진 정도를 나타낼수 있겠는가?

편차의 2제곱의 평균값을 s^2 으로 표시하고 분산이라고 부른다. 즉

$$s^2 = \frac{1}{n}\left[\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + \cdots + \left(x_n - \bar{x}\right)^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

그리고

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

를 표준편차라고 부른다.

자료가 빈도수분포표로 주어지면 분산은

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 n_i\,, \qquad n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

자료가 급분류빈도수분포표로 주어졌을 경우에는 다음과 같이 계산한다.

x_i 를 급중심, f_i 를 빈도수라고 하면 $\left(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ k\right)$

$$n = \sum_{i=1}^{k} f_i \quad , \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i f_i$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 f_i \quad \text{: 분산}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 f_i} \quad \text{: 표준편차}$$

표본에 의해 정해지는 $\bar{x}$와 s^2 및 s를 통계량이라고 부른다.

례 3. 두개 학급의 어느달 수학과목성적은 다음 표와 같다. 어느 학급의 성적이 높은가?

급	점수 / 인원	5	4	3
1	30	8	11	11
2	20	6	6	8

(풀이) 평균성적 $\overline{x}_1=\dfrac{5\times8+4\times11+3\times11}{30}=\dfrac{117}{30}\approx3.9$

$$\overline{x}_2=\frac{5\times6+4\times6+3\times8}{20}=\frac{78}{20}=3.9$$

두 학급의 평균성적은 같다. 분산을 계산하면

$x_i-\overline{x}$	$(x_i-\overline{x})^2$	첫 학급		둘째 학급	
		f_i	$(x_i-\overline{x})^2f_i$	f_i	$(x_i-\overline{x})^2f_i$
1.1	1.21	8	9.68	6	7.26
0.1	0.01	11	0.11	6	0.06
-0.9	0.81	11	8.91	8	6.48
계		30	18.7	20	13.8

여기로부터 $s_1^2=\dfrac{18.7}{30}=0.623$, $s_2^2=\dfrac{13.8}{20}=0.69$

평균성적은 비록 같지만 분산이 작은 1반이 2반보다 실력이 높다고 볼수 있다. 이것은 분산이 작을수록 성적이 높다는것을 보여준다.

례 4. 다음의 표는 한 과수농장에서 어떤 과일나무묘목 200그루의 높이를 재여 얻은 자료를 정리한것이다. 이 자료들의 평균값과 표준편차를 구하여라.

급(cm)	27.5 ~	29.5 ~	31.5 ~	33.5 ~	35.5 ~	37.5 ~	39.5 ~	41.5 ~43.5	계
빈도수 (묘목수)	3	10	23	47	49	40	36	2	200

(풀이) 가평균을 리용하는것이 편리하므로 $a=36.5$ 라고 놓고 계산한다.

$$\bar{u}=\frac{1}{n}(u_1f_1+u_2f_2+\cdots+u_8f_8)=-\frac{37}{200}=-0.185$$

x_i	f_i	u_i	u_if_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$f_i(x_i-\bar{x})^2$
28.5	3	-4	-12	-7.36	58.216 7	174.650 7
30.5	10	-3	-30	-5.36	31.696 9	316.969
32.5	23	-2	-46	-3.36	13.176 9	303.068 7
34.5	47	-1	-47	-1.36	2.656 9	124.874 3
36.5	49	0	0	0.37	0.136 9	6.708 1
38.5	40	1	40	2.37	5.616 9	224.676
40.5	26	2	52	4.37	19.096 9	496.519 4
42.5	2	3	6	6.37	40.576 9	81.153 8
계	200					1 728.62

$$\bar{x}=a+h\bar{u}=36.5+2(-0.185)=36.13(\mathrm{cm})$$

공식에 의하여 표준편차를 구하면

$$s=\sqrt{\frac{1}{200}\times 1728.62}=\sqrt{8.6431}\approx 2.94(\mathrm{cm})$$

문 제

1. 임의의 자료에 대해서나 편차의 총합은 늘 0이라는것을 밝혀라.
2. 표 4로 주어진 자료의 표준편차를 구하여라.
3. 표 5로 주어진 자료의 표준편차를 구하여라.

련습문제

1. 다음 관측값에서 최소값, 최대값, 중위값, 분포범위를 구하여라.
   165, 21, 19, 19.5, 17.5, 15, 15.5, 18.5, 18, 21, 20.5, 23, 23.5

2. 학생들의 키에 대한 관측값이 다음의 표로 주어졌다. 학생들의 평균키를 구하여라.

급간격	인원
150 – 155	2
155 -160	13
160 -165	25
165 – 170	10
170 -175	5
175 -180	3
180 – 185	2
계	60

3. 과목성적표가 다음과 같을 때 평균성적과 분산을 구하여라.

점수	5	4	3	계
인원	8	12	5	25

4. 다음 표는 학생들의 몸질량을 정리해놓은 급분류빈도수분포표이다.

급(kg)	30~	35~	40~	45~	50~	55~	60~65	계
빈도수 (명)	1	5	14	25	22	12	6	85

1) 평균몸질량을 가평균을 리용하는 방법과 리용하지 않는 방법으로 각각 구하고 비교하여라.
2) 표준편차를 구하여라.

5. 분산도의 하나로 또한 쓰이는것은 평균편차라고 부르는 다음과 같은 수값이다.

$$d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i \left| x_i - \bar{x} \right|$$

1) 련습문제 4에서 몸질량에 대한 자료의 평균편차를 구하여라.
2) 표준편차와 비교해보아라.
3) 평균편차를 구하는 과정에 리용하는 표와 표에 적어넣는 순차를 어떻게 하는것이 좋겠는가를 설명하여라.

제3절. 우연량의 확률분포

1. 2마디분포

실제 문제들에서는 이러저러한 시행을 한번이 아니라 여러번 거듭 반복할 때가 많다.

실례로 어떤 량을 반복 측정한다든가 실험을 되풀이하는것을 들수 있다.

이러한 시행들의 렬을 시행렬이라고 부른다.

시행렬 $\{T_i\}$에서 매 시행 T_i의 결과로 일어나는 사건 A_i들이 서로 독립이면 이 시행렬을 독립시행렬이라고 부른다.

만일 사건 A_i들이 두가지 사건 A, $\overline{A}$만으로 이루어졌다면 이 독립시행렬을 단순독립시행렬이라고 부른다.

례 1. 1) 사격수가 3발을 단발사격하는것은 단순독립시행렬인가?

2) 명중확률이 p일 때 명중회수의 확률을 구하여라.

(풀이) 1) 매 사격은 독립적으로 진행되며 그 결과는 매 사격에서 명중할 사건을 A로 표시하면 A이든가 $\overline{A}$로만 된다. 따라서 사격은 단순독립시행렬이다.

2) $P(A)=p$, $P(\overline{A})=1-P(A)=1-p=q$

명중회수 0, 1, 2, 3에 대응하는 사건을 B_0, B_1, B_2, B_3으로 표시하면 $B_0=\overline{A}\cap\overline{A}\cap\overline{A}$이므로

$$P_3(0)=P(B_0)=P(\overline{A})\cdot P(\overline{A})\cdot P(\overline{A})$$
$$=q\cdot q\cdot q=C_3^0q^3$$

이고

$$B_1=(A\cap\overline{A}\cap\overline{A})\cup(\overline{A}\cap A\cap\overline{A})\cup(\overline{A}\cap\overline{A}\cap A)$$

이므로

$$P_3(1)=P(B_1)=C_3^1P(A)\cdot[P(\overline{A})]^2=C_3^1pq^2$$

이고

$$B_2=\left(A\cap A\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap\overline{A}\cap A\right)\cup\left(\overline{A}\cap A\cap A\right)$$

이므로

$$P_3(2)=P(B_2)=C_3^2\cdot[P(A)]^2\cdot P(\overline{A})=C_3^2p^2q$$

이고 $B_3=A\cap A\cap A$ 이므로

$$P_3(3)=P(B_3)=P(A)\cdot P(A)\cdot P(A)=C_3^3p^3$$

일반적으로

> n 개로 된 단순독립시행렬에서 사건 A 가 m 번 나타날 확률을 $P_n(m)$이라고 하면
>
> $$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}\ (m=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n)$$
>
> 여기서 p 는 매 시행에서 A 가 나타날 확률, q 는 매 시행에서 $\overline{A}$ 가 나타날 확률(q＝1－p)이다.

우의 식에서 $P_n(m)$ 은 2마디식 $(px+q)^n$ 의 전개식에서 x^m 결수로 된다.

그러므로 매 m의 값에 결수로 되는 확률 $P_n(m)$이 대응되였다고 말할수 있다. 이러한 의미에서 $P_n(m)$ $(m=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$을 **2마디분포**라고 부른다.

례 2. 자동화된 생산공정에서 생산되여나오는 제품들에 대하여 매 시간마다 100개씩 선택하여 검사를 한다고 하자. 정상적인 조건밑에서 불합격품이 나올 확률은 0.005라고 한다. 이때 불합격품이 5개이상 나올 확률을 구하여라.

(풀이) 제품을 하나씩 검사하는것은 단순독립시행렬이라고 할수 있으므로 불합격품의 개수 k의 확률은 2마디분포에 따른다. 따라서 불합격품이 k개 나올 확률은 다음과 같다.

$$P_{100}(k)=C_{100}^k 0.005^k(1-0.005)^{100-k}$$

불합격품이 5개이상 나오는 사건을 A라면 $\overline{A}$ 는 불합격품이 4개이하인 사건이다. 따라서

$$P(\overline{A})=\sum_{k=0}^{4} C_{100}^k 0.005^k(1-0.005)^{100-k}\approx 0.9947$$

따라서

$$P(A) \approx 1 - 0.9947 = 0.0053$$

이것은 1 000번 검사하였을 때 불합격품이 5개이상 나타나는 사건은 5번정도 일어난다는것을 보여준다. 즉 정상상태에서는 거의 일어나지 않는다는것이다.

문 제

1. 주사위를 던질 때 웃면에 6의 눈이 나타날 확률은 $\frac{1}{6}$이다. 10번 던질 때 6의 눈이 나타나는 회수가 7일 확률을 구하여라.
2. 두 면에 각각 검은색과 흰색을 칠한 원판을 계속 던질 때 검은색이 계속 나타날 확률이 0.01보다 작게 하기 위해서는 원판을 적어도 몇번 던져야 하는가?($p=0.5$, $\lg 2 = 0.301$)
3. 《예》 또는 《아니》라고 대답할 6개의 문제에 대하여 되는대로 《예》 또는 《아니》라고 대답하였을 때 다음것을 구하여라.
   1) 두 문제만 옳게 대답하였을 확률
   2) 3문제이상 옳게 대답하였을 확률
4. 2등품이 10% 들어있는 제품상자에서 아무렇게나 4개의 제품을 꺼낼 때 그속에 들어있는 2등품의 개수의 확률을 구하여라.
5. 2마디분포를 리용하여 윷놀이에서 《도》, 《개》, 《걸》, 《윷》, 《모》가 나타날 확률을 구하여라.

실험에 의하면 2마디분포에서 n이 충분히 클 때 $P_n(m)$은 m의 변화에 따라 증가하다가 감소한다.

이때 $P_n(m)$이 최대로 되는 m을 구하는 문제는 흥미가 있다.

$$\frac{p_n(m+1)}{p_n(m)} = \frac{C_n^{m+1} p^{m+1} q^{n-m-1}}{C_n^m p^m q^{n-m}} = \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q}$$

이므로 $P_n(m+1) \le P_n(m)$이기 위해서는

$$\frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{P}{q} \le 1$$

즉

$$(n+1)\mathrm{p} \le m+1$$

로 될것이 필요하고 충분하다.

그러므로 $m_0 = [(n+1)\mathrm{p}]$ (여기서 [ ]는 옹근수부를 표시한다.) 라고 하면 다음 사실이 성립한다.

1° $(n+1)\mathrm{p}$ 가 옹근수일 때에는

$$\mathrm{p}_n(0) < \mathrm{p}_n(1) < \cdots < \mathrm{p}_n(m_0 - 1) = \mathrm{p}_n(m_0) > \mathrm{p}_n(m_0 + 1) > \cdots > \mathrm{p}_n(n)$$

2° $(n+1)\mathrm{p}$ 가 옹근수가 아닐 때에는

$$\mathrm{p}_n(0) < \mathrm{p}_n(1) < \cdots < \mathrm{p}_n(m_0 - 1) < \mathrm{p}_n(m_0) > \mathrm{p}_n(m_0 + 1) > \cdots > \mathrm{p}_n(n)$$

사실 $(n+1)\mathrm{p}$ 가 옹근수이면 $m_0 = (n+1)\,\mathrm{p}$ 이므로 $m_0 \le m+1$ 에서 $m_0 = m+1$ 또는 $m_0 = m$ 이다.

그러므로 $m = m_0 - 1$, $m = m_0$ 이므로

$$\mathrm{p}_n(m_0 - 1) = \mathrm{p}_n(m)$$

$(n+1)\mathrm{p}$ 가 옹근수가 아니면 $m_0 < (n+1)\mathrm{p}$ 이므로 $m_0 = m$ 이다. 따라서 $(n+1)\mathrm{p}$ 가 옹근수일 때에는 사건 A가 $m_0 - 1$ 또는 m_0 번 출현할 가능성이 제일 크고 $(n+1)\mathrm{p}$ 가 옹근수가 아닐 때에는 m_0 번 출현할 가능성이 제일 크다.

례 3. 가령 포가 8문 있다고 하자. 가동확률이 98%일 때 몇문의 예비포를 가져야 하는가?

(풀이) 이 문제를 풀자면 가동하지 못할 가능성이 제일 큰 경우를 생각하여야 한다. 가동하지 못할 사건을 A라고 하면 A의 확률은 2% 즉 0.02이다. 따라서

$$(n+1)\mathrm{p} = (8+1) \times 0.02 = 0.18$$

이므로 $[0.18] = 0$

이로부터 예비포가 필요없다는 결론이 얻어진다.

만일 이러한 포가 100문이 있다면

$$(n+1)\mathrm{p} = (100+1) \times 0.02 = 2.02$$

이므로 예비포는 2문이 있어야 한다.

문 제

1. 20대의 뻐스가 있다. 매 뻐스의 년평균 가동하지 못할 확률은 0.05이다. 몇대의 예비대수를 가져야 뻐스를 만가동할수 있겠는가?
2. 100대의 기대가 있다. 매 기대의 가동확률이 0.98이다. 기대의 만가동을 보장하려면 몇대의 예비기대를 가져야 하는가?
3. 11명의 축구선수로 구성된 축구팀에서 선수의 출석률이 0.98이다. 후보선수가 몇명이 있어야 하는가?

2. 우연량의 확률분포와 특성값

2마디분포에서 m이 $m=0,\ 1,\ \cdots$ 에 따라 변하면 m의 매 값에는 확률 $\mathrm{P}_n(m)$이 대응한다. 이와 같이 m과 같은 변량에 확률이 대응될 때 그 변량을 우연량이라고 부르고 우연량에 확률을 대응시켜놓은것을 확률분포라고 부른다.

2마디분포는 확률분포의 한 실례로 된다.

일반적으로 우연량 x가 취할수 있는 값이 $x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n$이고 이에 대응하는 확률이 $\mathrm{p}_1,\ \mathrm{p}_2,\cdots,\ \mathrm{p}_n$일 때 x의 확률분포는 표

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

로 표시할수 있다. 확률분포에서 확률들의 총합은 늘 1이다.

그것은 우연량이 잡을수 있는 모든 값에 대하여 그 값에 대응하는 사건들이 모두 배반사건들이고 그것들의 합사건은 확실한 사건이기때문이다.

례 1. 주사위를 두번 던질 때 웃면이 나타나는 눈의 수의 합 x의 확률분포를 구하여라.

(풀이) 주사위를 두번 던질 때 요소사건수는 36이다. 매 사건들을 $(i,\ j)$로 표시하자.(여기서 i는 첫번째 나온 눈의 수이고 j는 두번째 나온 눈의 수이다.)

i=2인 사건 (1,1)
i=3인 사건 (1,2), (2,1)
i=4인 사건 (1,3), (2,2), (3,1)
i=5인 사건 (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)
i=6인 사건 (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)
i=7인 사건 (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)
i=8인 사건 (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)
i=9인 사건 (3,6), (4,5), (5,4), (6,3)
i=10인 사건 (4,6), (5,5), (6,4)
i=11인 사건 (5,6), (6,5)
i=12인 사건 (6,6)

그러므로 주사위를 두번 던질 때 x의 확률분포는 다음과 같다.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

우연량의 확률분포를 알고있으면 그 우연량의 특성을 완전히 파악할수 있다.

그러나 어떤 경우에는 우연량의 개별적인 특성들만 알아도 될 때가 많다. 우연량의 개별적인 특성가운데서 가장 중요한것이 기대값과 편차이다.

우연량 x가 잡을수 있는 가능한 값들을 $x_1, x_2, \cdots, x_n$이라고 하고 그에 대응하는 확률을 각각 p_1, p_2, $\cdots$, p_n이라고 할 때

$$E_x = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$$

을 우연량 x의 **수학적기대값** 또는 **기대값**이라고 부른다.

수학적기대값은 우연량이 잡는 값들의 확률적인 평균값이라고 볼수 있으며 우연량의 확률분포에서 중심을 표시하는 특성량이다.

례 2. 주사위를 두번 던질 때 웃면에 나타나는 눈의 개수들의 합의 수학적기대값을 구하여라.

(풀이) 례 1의 표를 리용하면

$$E_x = 2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{1}{18}+4\cdot\frac{1}{12}+5\cdot\frac{1}{9}+6\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{1}{6}+$$

$$+8\cdot\frac{5}{36}+9\cdot\frac{1}{9}+10\cdot\frac{1}{12}+11\cdot\frac{1}{18}+12\cdot\frac{1}{36}=7$$

이것은 주사위를 두번 던질 때 웃면에 나타나는 눈의 개수의 합이 7일 때가 가장 많다는것이다.

례 3. 한가지 부속품을 생산하는 두 기대의 생산량가운데서 생기는 3등품의 개수 x의 확률분포는 각각 다음과 같다.

x_1	0	1	2	3
p	0.4	0.3	0.2	0.1

x_2	0	1	2	3
p	0.3	0.5	0.2	0

이 두대의 생산량이 같다면 어느 기대가 더 좋은가?

(풀이) 두 기대의 생산량이 같으므로 3등품의 개수가 더 적은 기대가 좋은 기대라고 평가할수 있다.

두 기대가 내는 3등품개수의 수학적기대값을 구하면

$E_{x_1} = 0\times0.4+1\times0.3+2\times0.2+3\times0.1=1$

$E_{x_2} = 0\times0.3+1\times0.5+2\times0.2+3\times0=0.9$

$E_{x_1} > E_{x_2}$

따라서 둘째 기대가 첫째 기대보다 더 좋다.

례 4. 2마디분포에 따르는 우연량의 수학적기대값을 구하여라.

(풀이) x가 2마디분포에 따르는 우연량이면

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

그러므로 그의 기대값은

$$E_x = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k \cdot n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

$$= np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} = np$$

례를 들면 명중확률이 0.95인 총으로 100발 사격할 때 95발정도는 명중할것이라고 짐작할수 있다.

문 제

1. 다음 수렬가운데서 우연량 x의 확률분포로 될수 없는것은 어느것인가?

1) 0, $\frac{1}{2}$, 0, 0, $\frac{1}{2}$ 2) 0.1, 0.2, 0.3

3) p, $1-p$, $p\ (p \neq 0)$ 4) $\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{2\cdot 3}$, $\cdots$, $\frac{1}{(n-1)\cdot n}$, $\frac{1}{n}$

2. 어떤 공장의 한 작업반에서 생산된 제품가운데서 1등품이 85%, 2등품이 10%, 3등품이 5% 있고 개당 1등품의 값은 100원, 2등품의 값은 90원, 3등품의 값은 85원이다. 이 작업반에서 하루 평균생산량이 1 000개이라면 매일 작업에 착수하기 전에 이 작업반에서는 얼마만한 수입을 기대할수 있는가?

3. 명중확률이 0.95로 평가된 사격수가 3번 사격할 때 목표판에 명중한 회수 x의 확률분포와 수학적기대값을 구하여라.

4. 원둘레모양의 고리를 던져 말뚝에 거는 놀이를 할 때 한개 걸릴 때마다 1점씩 받는다고 하자. 10개 던져서 8점정도 받는 학생이 4개의 고리를 던질 때 얻을수 있는 점수의 확률분포와 기대값을 구하여라.

우연량 x의 수학적기대값을 m이라고 할 때

$$(x_1 - \mathrm{E}_x)^2 \mathrm{p}_1 + (x_2 - \mathrm{E}_x)^2 \mathrm{p}_2 + \cdots + (x_n - \mathrm{E}_x)^2 \mathrm{p}_n$$

을 우연량 x의 **분산** 또는 **2 제곱편차**라고 부르고 $\sigma^2(x)$로 표시한다. 즉

$$\sigma^2(x) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mathrm{E}_x)^2 \mathrm{p}_k$$

그리고

$$\sigma(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \mathrm{E}_x)^2 \mathrm{p}_k}$$

를 **표준편차**라고 부른다.

수학적기대값 E_x 가 분포의 중심을 나타낸다면 2제곱편차 $\sigma^2(x)$와 표준편차 $\sigma(x)$는 중심으로부터 흩어진 정도(분산)를 나타내는 량이다.

우연량의 수학적기대값, 2제곱편차, 표준편차를 우연량의 **특성값**이라고 부른다.

례 5. 주사위를 두번 던질 때 웃면에 나타나는 눈수들의 합의 표준편차를 구하여라.

(풀이) 례 2에서 본바와 같이 수학적기대값은 $\mathrm{E}_x = 7$이다.

따라서

$$\sigma^2(x) = \frac{(2-7)^2}{36} + \frac{(3-7)^2}{18} + \frac{(4-7)^2}{12} + \frac{(5-7)^2}{9} +$$

$$+ (6-7)^2 \cdot \frac{5}{36} + \frac{(7-7)^2}{6} + (8-7)^2 \cdot \frac{5}{36} +$$

$$+ \frac{(9-7)^2}{9} + \frac{(10-7)^2}{12} + \frac{(11-7)^2}{18} + \frac{(12-7)^2}{36}$$

$$= 2\left(\frac{25}{36} + \frac{16}{18} + \frac{9}{12} + \frac{4}{9} + \frac{5}{36}\right) = 5\frac{5}{6}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2.145$$

례 6. 한 학생의 성적표가 다음과 같다.

과목	국어	수학	외국어	물리
성적	5	4	4	3

이때 성적평가를 위하여 시험성적을 우연량으로 보고 특성값을 구하여라.

(풀이) 확률분포는

x	5	4	4	3
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

평균성적은 수학적기대값으로 평가된다.

$$m = 5\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{4} = 4$$

2제곱편차와 표준편차를 구하면

$$\sigma^2(x) = (5-4)^2\cdot\frac{1}{4} + (4-4)^2\cdot\frac{1}{4} + (4-4)^2\cdot\frac{1}{4} + (3-4)^2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

따라서 평균성적은 우등이지만 편차가 있으므로 학생의 성적은 우등으로 평가할수 없다.

문 제

1. 명중확률이 0.9인 총으로 총탄 5발을 가지고 사격할 때 목표판에 명중한 회수 x의 수학적기대값과 표준편차를 구하여라.
2. 2마디분포에 따르는 우연량의 표준편차가 $\sigma = \sqrt{n\mathrm{pq}}$ 임을 밝혀라.

3. 정규분포

주사위를 n번 던져서 1의 눈이 k번 나올 확률은

$$P_n(k)=C_n^k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$

에 의하여 구할수 있다.

오른쪽표는 $n=10$일 때 1의 눈이 나올 회수 x의 확률분포이다. 마찬가지로 $n=30$, 50일 때에도 그 확률분포를 구할수 있다. 이것을 그라프로 표시하면 그림 5-2와 같다.

k	$p_{10}(k)$
0	0.161 5
1	0.323 0
2	0.290 7
3	0.155 0
4	0.054 3
5	0.013 0
6	0.002 2
7	0.000 2
8	0.000 0
9	…
10	…

그림에서 보는것처럼 n의 값이 커짐에 따라 그라프의 모양은 점차적으로 대칭으로 되여간다.

일반적으로 우연량 x가 2마디분포에 따를 때 n값이 커짐에 따라 그 확률분포의 그라프는 대칭인 곡선에 가까와 간다는것이 알려져있다.(그림 5-3)

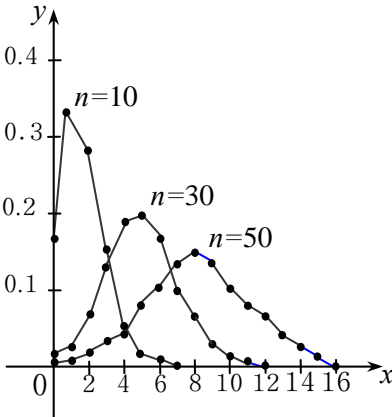



그림 5-2

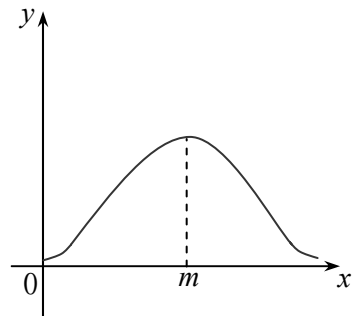



그림 5-3

이와 같은 곡선에 따르는 우연량 x의 확률분포를 정규분포, 그 곡선을 정규분포곡선이라고 부른다.

자연현상과 기술에서 만나게 되는 대부분의 우연량들은 정규분포에 따른다.

례를 들면 같은 종류의 생물체들의 이러저러한 기관들의 크기라든가 같은 나이의 사람들의 키, 발의 길이 그리고 여러가지 물리적량들의 측정값들, 브라운운동하는 립자의 자리표성분 등 수많은 량들은 정규분포에 따른다.

우연량 x의 평균값이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포곡선은 다음과 같은 성질을 가진다.

1° 곡선은 $x=m$에 관하여 대칭이다.

2° 곡선은 $x=m$일 때 최대값을 가지며 x가 m에서 멀어져감에 따라 곡선은 x축에 가까와간다.

3° 곡선과 x축사이의 부분면적은 1이다.

평균값이 m, 분산이 σ^2인 정규분포를 $N(m, \sigma^2)$으로 표시한다.

우연량 x가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$에 따를 때 다음 사실이 성립한다.

우연량 x가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$에 따를 때 $P(m-\sigma \le x \le m+\sigma) = 0.683$ $P(m-2\sigma \le x \le m+2\sigma) = 0.954$ $P(m-3\sigma \le x \le m+3\sigma) = 0.997$

여기서 0.683, 0.954, 0.997을 믿음확률, $(m-\sigma, m+\sigma)$, $(m-2\sigma, m+2\sigma)$, $(m-3\sigma, m+3\sigma)$를 대응하는 믿음구간, 68.3, 95.4, 99.7을 믿음도라고 부른다.(그림 5-4)

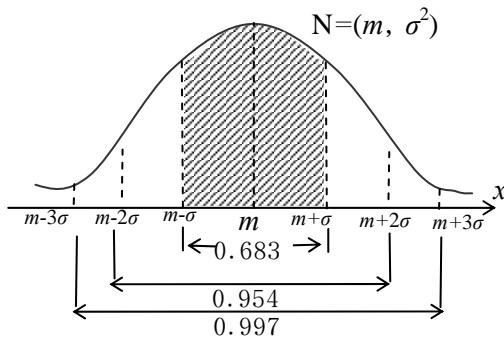



그림 5-4

례 1. 어느 한 중학교 6학년 남학생들의 키는 기대값이 163cm, 표준편차가 3cm인 정규분포에 따른다고 한다. 이 학생들의 키는 어떤 범위에 든다고 말할수 있는가?

(풀이) $m=163$ (cm), $\sigma=3$ (cm)이므로

$$m-3\sigma=163-3\cdot3=154\ (\text{cm})$$

$$m+3\sigma=163+3\cdot3=172\ (\text{cm})$$ 이므로

이 학생들의 키는 99.7%가 154～172cm라는것을 알수 있다.

례 2. 불합격품이 나올 확률이 0.05인 기대에서 생산한 제품을 1 000개 검사할 때 70개이상의 불합격품이 나올 확률을 구하여라.

(풀이) 제품검사에서 불합격품의 개수를 x라고 하면 x는 2마디분포에 따른다.

$n=1000$, $\mathrm{p}=0.05$ 이므로

$$m=n\mathrm{p}=1000\times0.05=50\ (\text{개})$$

$$\sigma=\sqrt{n\mathrm{pq}}=\sqrt{1000\times0.05\times0.995}\approx7\ (\text{개})$$

그런데 시행회수 $n=1000$ 은 충분히 큰 값이므로 우연량 x는 정규분포 $(50,\ 7^2)$에 따른다고 볼수 있다.

$$m+3\sigma=50+3\times7=71$$

따라서

$$\mathrm{P}(x\ge70)=\mathrm{P}(x\ge m+3\sigma)\approx\frac{1}{2}\cdot(1-0.997)=0.0015$$

이것은 1 000개에서 70개이상의 불합격품이 나오는 사건은 거의 일어나지 않는다는것을 보여준다.

문 제

1. 우연량 x가 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 7^2)$에 따를 때 다음 확률을 구하여라.

   1) $\mathrm{P}(99\le x\le141)$　　　　2) $\mathrm{P}(x\ge106)$

2. 어느 한 중학교 6학년 녀학생들의 키는 기대값이 156cm이고 표준편차가 3cm인 정규분포에 따른다고 한다. 이때 이 녀학생들의 68.3%가 속하는 키의 범위를 구하여라.

3. 주사위를 7 200번 던질 때 웃면에 1의 눈이 1 000번이상 나올 확률을 구하여라.

련습문제

1. 토끼가 새끼를 낳을 때 암컷과 수컷을 낳을 확률이 각각 0.5라고 할 때 다음것을 구하여라.
   1) 8마리의 새끼가운데 암컷이 3마리일 확률
   2) 8마리의 새끼토끼가운데 4마리이상이 수컷이 아닐 확률
2. 명중확률이 0.8인 사격을 n번 진행하였을 때 적어도 $n-1$번 명중할 확률이 0.92보다 작게 되는 가장 작은 n을 구하여라.
3. 100개의 제품이 들어있는 상자에 10개의 특제품이 섞여있다. 상자에서 임의로 5개의 제품을 꺼내였을 때 거기에 들어있는 특제품의 개수 x의 확률분포와 수학적기대값을 구하여라.
4. 앞뒤가 구별되는 5개의 원판을 동시에 던질 때 앞면이 나타나는 개수를 x라고 할 때 다음것을 구하여라.
   1) x의 확률분포
   2) x의 수학적기대값과 표준편차
5. 남학생 5명, 녀학생 3명이 있는 분조에서 2명의 대표를 선출할 때 선출되는 남학생수를 x라고 할 때 x의 확률분포, 수학적기대값과 표준편차를 구하여라.

복습문제

1. 수자 1, 1, 2, 2, 3을 가지고 만든 세 자리수들의 모임에서 아무렇게나 한개를 선출하였을 때 그 수가 200보다 크고 300보다 작은 수일 확률을 구하여라.
2. 100개까지의 자연수들가운데서 임의로 선택한 수가 7로 완제될 확률을 구하여라.
3. 100개의 제품가운데 불합격품이 5개 있다. 여기서 아무렇게나 5개 잡았을 때
   1) 불합격품이 하나도 없을 확률을 구하여라.
   2) 적어도 한개의 불합격품을 포함하는 경우의 확률을 구하여라.

4. 10명의 사람이 0부터 9까지의 수자를 각각 한개씩 쓸 때 10명이 다 다른 수자를 쓸 확률을 구하여라.

5. 승강기가 7명의 사람을 태우고 10개의 층에 멎는다. 같은 층에서 2명이상 내리지 않을 확률을 구하여라.

6. 12명의 남학생과 8명의 녀학생이 있다. 20명의 학생가운데서 6명을 선수로 뽑으려고 한다. 이때 남학생 4명, 녀학생 2명이 뽑힐 확률을 구하여라.

7. 수자 1을 쓴 카드가 5매, 3을 쓴 카드가 3매, 5를 쓴 카드가 2매 있다. 임의로 3매의 카드를 잡을 때

   1) 적어도 두매의 카드에 쓴 수자가 같을 확률을 구하여라.

   2) 3매의 카드에 쓴 수자의 합이 7로 될 사건의 확률을 구하여라.

8. 자동보총사격에서 10점에 맞힐 확률은 0.7, 9점에 맞힐 확률은 0.3이다. 3발 사격하여 29점이상 맞힐 확률을 구하여라.

9. 길이가 10인 비트렬(수자 0 또는 1로 이루어진 10자리수자렬)을 우연적으로 발생시킨다. 다음의 경우에 비트렬이 0을 포함하지 않을 확률을 구하여라.

   1) 비트 0과 비트 1의 발생확률이 같을 때

   2) 비트 1의 발생확률이 0.6일 때

10. 길이가 4인 비트렬을 임의로 선택할 때 첫 비트가 1이라는 조건에서 비트렬에 적어도 2개의 0이 련이어있을 확률은 얼마인가?

11. 매 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 0.2이다. 시행을 사건 A가 나타날 때까지 진행한다고 할 때 4번째만에 사건 A가 나타날 확률을 구하여라.

12. 5개의 흰공과 5개의 검은공이 들어있는 통에서 임의로 공을 1개씩 5번 꺼내는데 매번 꺼냈던 공을 다시 넣는다.

    1) 흰공을 3번 꺼낼 확률을 구하여라.

    2) 적어도 한번 흰공을 꺼낼 확률을 구하여라.

13. 주사위를 60번 던질 때 웃면에 1의 눈이 나오는 회수 x의 기대값과 표준편차를 구하여라.

14. 통안에 흰공이 7개, 붉은공이 3개 들어있다. 여기서 꺼낸 공은 다시 통에 넣지 않으면서 통에서 아무렇게나 공을 하나씩 꺼내는데 붉은공이 나오면 그만 둔다고 한다. 꺼낸 흰공의 개수 x의 기대값과 그의 표준편차를 구하여라.

15. 어느 중학교 500명 학생들의 키는 평균값이 163.4cm, 표준편차가 5.6cm인 정규분포에 따른다. 다음의 키를 가진 학생은 전체의 몇%인가?

1) 152.2cm이상 174.6cm이하

2) 157.8cm이상 169cm이하

3) 174.6cm이상

4) 146.6cm이상

16. 한번의 시행에서 나타날 확률이 0.5인 사건 A가 1 000번의 독립시행에서 400~600번 나타날 확률이 0.97보다 크다고 할수 있는가?

17. 다음 표는 어느 학급의 학생 40명에 대한 몸질량의 급분류빈도수분포표이다.

몸질량(kg)	45~50	50~55	55~60	60~65	65~70	계
빈도수(명)	5	10	14	8	3	40

몸질량의 평균값과 표준편차를 구하여라.

18. 모집단이 다음과 같은 분포에 따를 때 크기 100인 임의의 표본평균은 어떤 분포에 따른다고 볼수 있는가?

1) 모집단은 $n=1\,000$, $\mathrm{P}=0.2$인 2마디분포에 따른다.

2) 모집단은 정규분포 $\mathrm{N}\left(50,\ 10^2\right)$에 따른다.

복습문제의 답

제1장

1. 60가지 **2.** 5 040가지, 1 440가지, **3.** 1 680개 **4.** 720개 **5.** $\frac{n(n-4)(n-5)}{6}$개 **6.** 450개 **7.** 2 400가지 **8.** 1) 4 200가지 2) 1 680가지 **9.** 24가지 **13.** $-\frac{39375}{16}$ **14.** C_{3m}^{m}

제2장

1. 1) $y=\frac{1}{2}x+3$ 2) $y=-3x+5$ 3) $y=-x-2$ 4) $3x+7y+6=0$ **2.** 1) (0, 2), 방향결수 1 2) (0, $-\frac{3}{5}$), 방향결수 $\frac{2}{5}$ 3) (0, 3), 방향결수 0 4) 사귐점 없다. 방향결수 ∞ **3.** 1) $y=-\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}$ 2) $y=\frac{3}{2}x$ 3) $y=3.5$ 4) $x=-\frac{5}{3}$ **5.** $y=x-5$, $y=-x+1$ **6.** $y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$, $y=\frac{3}{2}x-\frac{19}{2}$ **7.** $y=\frac{1}{6}x+\frac{4}{3}$ **8.** $k=-2$ **9.** $m=\frac{3}{2}$, $n=\frac{1}{2}$ **10.** $x^2+y^2=13$ **11.** 1) 중심이 (0, 2)이고 반경이 2인 원둘레 2) 중심이 (1, −2)이고 반경이 5인 원둘레 **12.** 1) $e=\frac{3}{5}$ 4) $b=\sqrt{3.96}$

제3장

1. 1) 2 2) 0 **2.** 1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{3}$ **3.** 1) 6 2) 1 3) 2 4) $-\frac{1}{2}$ **4.** 1) 4 2) −3 3) $\frac{n}{m}$ 4) 0 **5.** 1) $y'=6x^2-3$ 2) $y'=2x+1$ 3) $s'=3t^3-t+2$ **6.** 1) $f'(s)=-40s^4+6s^2-8s$ 2) $s'=40t^4+12t^2-20t$ **7.** $y=-x-2$ **8.** 1) $y'(a)=3a^2-12a$ 2) $x=0$, $x=4$ **9.** 1) $(-\infty, 1)$에서 감소, (1, +∞)에서 증가 2) (1, 3)에서 감소, $(-\infty, 1)$ ∪ (3, +∞)에서 증가 **10.** 1) 극대값 $y(1)=3$, 극소값 $y(3)=-1$ 2) 극대값 $y(-2)=-4$, 극소값 $y(0)=0$

제4장

1. 1) 2 2) $\frac{13}{6}$ 3) 8 4) $\frac{1}{3}$ **2.** $\frac{125}{6}$ **3.** 1) $\frac{4}{3}$ 2) $v_0t_1-\frac{1}{2}gt_1^2$ 3) 4 **4.** $\frac{1}{6}$ **6.** 1) $\frac{3}{5}ax^5+c$ 2) $\frac{1}{2}t^4-\frac{t^3}{3}+c$ 3) $\frac{x^3}{12}-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+c$ 4) $-2x^3+\frac{7}{2}x^2-2x+c$ 5) $\frac{(t-1)^4}{4}+c$ **7.** $10\frac{2}{3}$ **8.** πpa^2 **9.** π

제5장

1. $\frac{7}{18}$ **2.** $\frac{7}{50}$ **3.** 1) 약 0.77 2) 약 0.23 **4.** 0.000 36 **5.** 0.060 48 **6.** 약 0.358 **7.** 1) 0.75 2) 0.291(6) **8.** 0.784
9. 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ 2) 0.6^{10} **10.** $\frac{3}{16}$ **11.** 0.001 28 **12.** 1) $\frac{5}{16}$ 2) $\frac{31}{32}$ **13.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ **14.** $\frac{11}{6}$, 1.37 **15.** 1) 95.4% 2) 68.3% 3) 2.3% 4) 99.85%
16. 말할수 있다. **17.** 56.75, 5.54 **18.** 1) $N\left(200, \left(\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2\right)$ 에 따른다. 2) $N(50, 1^2)$에 따른다.